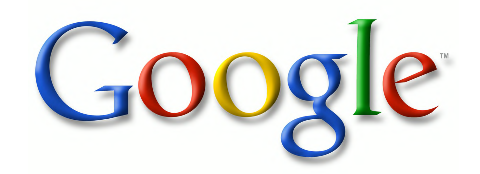


MOLLWEIDE
COMMENTATIONES MATHEMATICO-PHILOLOGICAE


CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS
SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV·ANG·

COMMENTATIONES
MATHEMATICO-PHILOLOGICAE
TRES,

SISTENTES

EXPLICATIONEM DVORVM LOCORVM DIFFICILIVM,
ALTERIVS VIRGILII, ALTERIVS PLATONIS,

ITEMQVE

EXAMINATIONEM DVORVM MENSVRARVM PRAECEPTORVM COLVMELLAE.

ADIECTA EST EPISTOLA

AD

VIRVM CLARISSIMVM I. G. SCHNEIDER, SAXONEM
PROFESSOR. VRATISLAVIENS.

DE

EXCERPTIS GEOMETRICIS EPAPHRODITI ET
VITRVVII RVFI

SCRIPTA

AB AVCTORE HARVM COMMENTATIONVM
Karl Brandan
CAROLO BRANDANO MOLLWEIDE,
ASTRON. IN ACAD. LIPS. PROFESSORE.

ACCEDIT TABVLA AENEA.

LIPSIAE
SVMTIBVS CAROLI CNOBLOCHII
MDCCCXIII.

PRAEFATIO.

Commentatiuncularum, quas hic fasciculus offert, prima pro cathedra a me ad consequenda magisterii Lipsiensis iura more academico sustentata est et defensa, iamque tunc in vulgus edita. Causa editionis iteratae fuit, vt eruditi, si qui illam propius inspicere voluerint, (foris enim requiri ex bibliopola intellexi) expeditioris comparationis opportunitatem haberent. In quo proposito non parum confirmabar eo, quod dissertationem istam duumuiris summi inter eruditos nominis, Hermanno et Wolfio, haud displicuisse cognoui, quorum ille in disputatione publica, qua opponentis partes suscipere haud dedignatus est, quantum faueret opellae meae, aperte significauit, hic istam ipsam commentationem primis tantum lineis adumbratam, qualis in Illustriss. de Zach diario extat *), non minus fauenti

---

*) *Monatl. Corresp. B. V. S. 416. u. folgg.*

suffragio excepit, quod coram, postquam Halae in ipsius notitiam et familiaritatem venire mihi contigit, declarauit. Idem hic vir eruditissimus auctor extitit mihi, vt Platonis locum altera commentatione tractatum enodare adgrederer. Cuius auctoritati quum paruissem, quam compofueram exercitationem, obtuli Societati Regiae Goettingensi, quae eam non sine testificatione adsensus accepit, de eaque relationem diario sub ipsius ductu prodeunti inserendam *) curauit. Verum quum pro harum ephemeridum instituto relatio ista nonnisi breuis esse posset, et insuper figuris ad explicationem a me propositam plene intelligendam necessariis destitueretur, consilium cepi, integram edendi commentationem, idque eo magis, quod etiamnum circa istum Platonis locum haereri ac laborari vidi. Commentatio tertia et ipsa Societati Regiae Goettingensi in gratiam tributi mihi honoris commercii epistolarum exhibita ideo prodit hic, partim vt postulationi viri docti, qui in diario praedicto de illa retulit **), in formularum Columellianarum originem paullo

---

*) *Götting. gel. Anz.* 1805. *St.* 124. *p.* 1233.

**) *Gött. gel. Anz.* 1807. *St.* 74. *p.* 729.

diligentius inquirendi, quod iam praeſtitum arbitror, concederem, partim quod eam a viris doctis, quos inter eruditiſſimum Schneiderum honoris cauſa nomino, poſtulari comperi. Omni autem ſtudio id egi, vt adſenſu, quem commentatiunculae hic exhibitae apud eruditos iampridem tulerunt, adhuc digniores redderem. Ea mente nonnulla penitus refinxi, alia correxi plura addidi. Sic v. c. in prima commentatione totus locus de ortu et occaſu ſiderum plane aliter conſtitutus, et generalius atque exactius explicatus eſt, caſusque, in quibus fuga ſideri alicui reſpectu alterius poteſt ac ſolet affingi, omnes ſunt euoluti atque exemplis illuſtrati, nec non Manilii locus, in quo vocabulum Piſcis ſine vllo additamento de Piſce notio dictum eſt, productus, id quod ad explicationem loci Virgiliani magni momenti eſt. Singulis vero commentationibus acceſſit breuis recenſus conaminum virorum doctorum, qui in eodem, quod quaeque commentatio propoſitum habet, argumento laborarunt. Ceterum ſi quis ea iudicii acerbitate fuerit, vt lucubratiunculas iſtas a ratione muneris profeſſoris aſtronomiae et ſpectatoris coeli ſiderumque aliena putet, neque cum eo conſociandas pronunciet, ſciat, ſpeculae aſtrono-

micae noſtrae refectionem ſumme neceſſariam, eamque inchoatam quidem, at nondum abſolutam iamdudum mihi ingratum otium ab inſtituendis ſiderum obſeruationibus feciſſe, tum cogitet velim, diſſertationis primae materiem haud ita longe a re aſtronomica ſeiunctam, poſteriores duas autem ante exaratas eſſe, quam munus, quo in praeſens fungor, mihi demandaretur, denique meminerit quaeſo, ante hoc noſtrum aeuum, vt bene monuit Clariſſimus Schneider in fine praefat. in Vitruuium, philologiae artisque criticae cognitionem et vſum vel adeo Mathematicis communem et familiarem fuiſſe, quod pluribus exemplis, ſi opus eſſet, confirmari liceret. Nihil igitur iam reſtat, quam vt otium a me ſic collocatum optem, vt neque eruditos, qui has commentationes expetiuerunt, ſuae exſpectationis, nec me, qui morem illis geſſi, ſuſcepti earum edendarum conſilii poeniteat.

Dabam Lipſiae III. Cal. Oct. MDCCCXIII.

I.

DE PISCE, QVEM OCCIDENS PLEIAS FVGIT:

AD EXPLICANDVM LOCVM IN VIRGILII GEORG. IV. 231—235.

0 9

Me vero primum dulces ante omnia Musae,
Quarum sacra fero ingenti percussus amore,
Accipiant; coelique vias et sidera monstrent; reliq.
GEORG. LIB. II. — 475 et seqq.

Ceterum iste poëtis vsitatus temporum significandorum mos nomini ortuum et occasuum poëticorum, quo apparitiones et occultationes siderum solis cursu determinatae insigniuntur, originem dedit.

§. II.

Inter Georgicorum loca, in quibus ortus aut occasus siderum fit mentio, ille quoque est, quo poëta tempora duo mellis de fauis excipiendi sequentem in modum designat:

Bis grauidos cogunt fetus: duo tempora messis;
Taygete simul os terris ostendit honestum
Plias, et Oceani spretos pede repulit amnis:
Aut eadem sidus fugiens vbi piscis aquosi
Tristior hibernas caelo descendit in vndas.
LIB. IV. 231—235.

Primam ergo fauorum exemtionem fieri iubet sub exortum Pleiadis, secundam circa occasum eiusdem. Quem hîc significat Virgilius occasum, matutinum s. cosmicum esse, ex eo, quod tunc Pleiadem in hibernas vndas descendere praedicat, facile colligitur. Vnde sponte consequitur, ortum, quem innuit poëta, pariter matutinum s. heliacum esse, quoniam si de ortu vespertino acciperes, primae mellationis tempus ad tempus alterius nimium appropinquaret atque cum eo fere congrueret, id quod res ipsa non patitur.

§. III.

Sed quo melius, quae huc vsque dicta sunt a nobis, et in posterum dicentur, intelligi queant, necesse videtur, rem paullo altius repetamus, totamque or-

tuum et occasuum poëticorum rationem accuratius aliquanto et fusius exponamus.

Est igitur ortus et occasus poëticus genus quoddam ortus et occasus communis, quo stellae ortui atque occasui subiectae quotidie supra horizóntem euehuntur, vel infra eundem deuoluuntur. Ortus scilicet et occasus, qui fiunt comparate ad solem, dicuntur *poëtici*, et quidem ii, qui oriente sole contingunt, *matutini*, qui occidente, *vespertini*. At quoniam sole in horizonte posito stella ortum vel occasum faciens nudis oculis se vix aut nullo modo conspiciendum praebet, solis lumine quippe exstincta, sed quo eius ortus occasusve sub adspectum cadat, sol ad profunditatem aliquam pro splendore stellae variantem, *arcum visionis* dicunt, sub horizontem depressus sit, necesse est; hinc ortuum et occasuum commemoratorum nascitur subdiuisio in *veros* et *apparentes* s. *visibiles*, quorum illi in ipsum solis orientis occidentisue articulum incidunt, hi autem ab eius ortu vel occasu aliquo temporis interuallo eodemque minimo omnium, quae inter solis exortum vel obitum stellaeque ad ortiuum aut occiduum horizontem appulsum intercedere possunt, seiunguntur.

Quatuor itaque sunt species ortus poëtici siderum totidemque occasus eorum, quarum loco recentiorum plurimi triplicem tantum huiusmodi ortuum et occasuum differentiam statuunt; et quidem ortum atque occasum matutinum verum nominarunt *cosmicum*, vespertinum verum autem *acronychum*. At ortum matutinum visibilem itemque occasum vespertinum apparentem cum Seruio *) *heliacos* appellare maluerunt, quos Segnero **) praeeunte congruentius multo ortum primum et occasum postremum dixeris.

*) ad Virgilii Georg. I. 215.
**) *Astronom. Vorles.* §. 366.

§. IV.

Vt varietatis, ordinis et ſucceſſionis horum ortuum et occaſuum, quorum ratio et fundamentum motus ſolis proprius eſt, quo aliquando propius ad fixas accedit, aliquando longius ab iis recedit, exemplum aliquod habeatur, diuerſos *Reguli* ortus et occaſus, vt ſe inuicem excipiunt, percenſebimus. Vtimur autem Regulo, quia haec primae magnitudinis ſtella, quae in Leonis pectore fulget, haud procul ab annua ſolis via poſita eſt (abeſt quippe hoc noſtro tempore $27\frac{1}{2}'$) ideoque facilem atque expeditum contemplandi modum offert.

Medio Iulio igitur, quando Regulus ſoli ab occidente verſus orientem progredienti et ad 27° ♌, circa quem locum Regulus noſtra aetate haeret, contendenti in tantum vicinus factus eſt, vt paullo poſt illius occaſum occidat poſtridie veſperi in regione caeli occidua haud appariturus, occaſum veſpertinum viſibilem facit, poſt quem prae fulgore ſolis aliquamdiu plane non conſpicitur. Inter hoc occultationis ſuae tempus, circa diem XX Aug., quo ſol ad 27° ♌ peruenit, cum ipſo ſimul oritur atque occidit, ſiue verum ortum matutinum, eiusdemque nominis occaſum veſpertinum celebrat. Exeunte deinde Auguſto e ſolis verſus ortum magis progreſſi radiis emerſus tum quum primum mane ante eius exortum in parte caeli ortiua ſeſe oſtendit, ortu matutino apparente oritur. Iam in dies longius a ſole recedit, doneo inchoante Februar. tantum digreſſus ſit, ut mox poſt ipſius occubitum oriatur poſtera veſpera ortum haud celebraturus. Atque tunc ortu veſpertino viſibili oritur, ex quo per aliquod tempus conſpicitur quidem, ſed neque ſupra horizontem emergens neque infra eum delabens. A die XVII Februar. autem, quo e regione ſolis 27° ♒ tenentis oritur et occidit, ſicque verum ortum veſpertinum neo

non occaſum matutinum facit, rurſus ſoli appropinquat, vsque dum ſub medium Mart. in tantum acceſſerit, ut mane ante eius ortum occidat. Et tunc occaſum matutinum apparentem facit; quo celebrato quotidie propius ſoli admouetur anno vertente rurſus ſe in eius radios immerſurus orbemque phaenomenorum quem deſcripſimus, denuo percurſurus.

§. V.

In temporibus ortuum et occaſuum poëticorum ſtellae alicuius definiendis duplicem rationem adhibere licet, experientiam dico et diſciplinam. Sed illa dumtaxat ortus et occaſus apparentes ſpeculari, hac, eaque ſola veros, nec minus apparentes eruere poſſumus. Illi formulis non eſt opus, ſed oculis modo valentibus; haec, ſcientiae poſitus ſiderum motusque ſolis innixa, arithmetices ac geometriae ope quaecumque circa ortus et occaſus ſiderum quaeri poſſunt, patefacit, quam quidem rationem, ubi tempora praeterita ſpectantur, ſolam adhibendam eſſe, per ſe manifeſtum eſt.

§. VI.

Inueſtigatio temporis, in quod ortus vel occaſus ſtellae alicuius poëticus ſuper dato horizonte, ſi quidem ſuper eo contingere queat, incidit, per diſciplinam et praecepta inſtituta, tribus fieri modis poteſt. Aut enim globo caeleſti artificiali, aut planiſphaerio, aut calculo conficitur. Primus modus facillimus ac phaenomenis ante oculos ponendis et velut depingendis perquam idoneus eſt. Quare iis maxime conuenit, qui ſchematum deſcribendorum vel calculorum ſubducendorum haud ſatis gnari vel in iis parum exercitati in rem praeſentem tamen venire amant. Huic ipſorum omni laude proſequendo deſiderio ſatisfaciunt inſtitutiones de vſu vtriusque globi artificialis, quas inter

primo loco mihi laudanda venit illa, quam Cel. Scheibelius, explicationibus et consectariis postea additis, in vulgus edidit. *) Nonnulli quoque systematum astronomicorum conditores de temporibus ortuum et occasuum poëticorum siderum, globi caelestis ope inueniendis, praecepta dederunt; quorum e numero prae ceteris Segnerus mihi nominandus est, propterea quod quomodo globus ad tempora, quae id, quo globus constructus est, vel antecedunt vel insequuntur, accommodandus sit, commonstrauit, **) quod ipsum et Celeb. Scheibelius praestitit.

§. VII.

Planisphaeriorum, quae et alias astrolabia audiunt, duo genera hic in censum veniunt, quorum vni oculo in polo mundi australi constituto planum aequatoris, siue cum Ptolemaeo mauis, tropici capricorni pro tabula est, alterum oculo in puncto Nadir dicto statuto horizontis planum tabulam habet. Illud ab astrolabiorum scriptoribus astrolabium particulare, hoc autem horizontale vocatur; quae vero appellationes quum ad rationem vsumque eorum haud satis quadrare videantur, prius, omnibus omnino horizontibus accommodatum, planisphaerium vniuersale, posterius vero, ad vnum tantummodo horizontem restrictum, particulare nominabo.

De planisphaerii vniuersalis constructione vsuque admodum prolixe egit Clauius in opere singulari, cui titulum Astrolabii praefixit. In eius lib. III. can.

*) Vollständiger Unterricht vom Gebrauch der künstlichen Himmels- und Erdkugel, Breslau, 1779. 8. Erläuterungen und Zusätze zu dem vollständigen Unterricht vom Gebrauch der künstlichen Himmels- und Erdkugel, abgefaſst von Ioh. Ephr. Scheibel, Breslau, 1785. 8.

**) Astronomische Vorlesungen, §. 361. u. folg.

IV. et V. tempora quoque ortuum et occasuum poëticorum stellae alicuius astrolabii ope inuenire docuit. Sed quoniam Clauii ratio nimis perplexa ac proinde non parum taediosa est, solutionis ab illo traditae methodum breuiter adumbrabimus, lectores nostros remittentes ad Clarissimi Klügelii libellum, in quo proiectionis stereographicae proprietates non minus eleganter quam dilucide explicuit.

Radio itaque pro arbitrio accepto describatur circulus aequatorem repraesentans, et in eo ducantur duae, quae angulos rectos intercipiant, diametri, sectiones planorum aequatoris et vtriusque coluri nec non ipsos coluros referentes. Alterutra earum pro coluro aequinoctiorum assumta, vt altera colurum solstitiorum exhibeat, per §. 8. libelli Klügeliani describatur circulus, qui aequatorem in punctis intersectionum ipsius et coluri aequinoctiorum sub mutua aequatoris et eclipticae inclinatione transeat, adeoque eclipticam referat, inueniaturque per §. 9. proiectura poli borei illius. Si iam positio stellae, de cuius ortu vel occasu poëtico quaeritur, per ascensionem rectam et declinationem detur, ad locum eius in planisphaerio designandum, nihil opus est, nisi vt per §. 30. ducatur circulus aequatori parallelus, qui circulum diurnum stellae repraesentet, hicque deinde recta ex aequatoris centro, quod vtrumque polum mundi refert, ad punctum in circuitu ipsius, ascensioni rectae datae competens, educta, et declinationis circulum exhibente, secetur. Sectionis punctum enim stellae locus proiectus est. Sin autem stellae longitudine et latitudine datis, positus ipsius ad eclipticam relatus sit, inscriptio eius perficitur describendo tum per §. 30. circulum, qui circulum eclipticae parallelum, notae distantiae stellae a polo eclipticae boreo respondentem, exhibeat, tum per §. 31. circulum, qui proiecturas polorum eclipticae transiens circulum latitudinis stellae referat. Ho-

rum quippe circulorum interſectione punctum, ſtellae viçem gerens, innoteſcit.

Reliquum eſt, ut in planiſphaerio horizon deſignetur, qui quidem, ob ſphaerae caeleſtis conuerſionem et inde continuo mutatum ſitum ſtellarum horizontis reſpectu, variabilis eſt. Deſcripto igitur ad datam poli eleuationem ſecundum §. 8. circulo, qui horizontem in aliquolibet ipſius ſitu repraeſentet, ſi e centro aequatoris, interuallo rectae inter illud et centrum proiecturae horizontis interiectae ducatur alius circulus; huius circumducta erit locus centri proiecturae horizontis quemcumque ſitum tenentis.

Vt inueniantur iam tempora ortuum et occaſuum poëticorum ſtellae propoſitae, quaerenda ſunt prius puncta eclipticae, in quibus ſol haeret, quando ſtella oriente vel occidente et ipſe oritur aut occidit, et ex iis demum tempora deriuanda. Illi propoſito autem modo ſequente ſatisfit.

E loco ſtellae, tamquam centro, radio proiecturae horizontis fiat arcus circulum poſtremo deſcriptum, in quo videlicet centrum proiecturae horizontis locatur, bis transiens et e punctis tranſitus eodem illo radio ducantur circuli duo horizontem exhibentes in duabus poſitionibus, quas ſtella ortum vel occaſum faciente habet. Horum namque circulorum et eclipticae interſectiones nota efficient quatuor puncta quaeſita, quorum quaenam ad ortum ſtellae, quaenam ad occaſum eius pertineant, ex data poſitione proiecturae meridiani, vt quae centra aequatoris et proiecturae horizontis traiiciat, facile diiudicatur.

Loca ſolis praecedenti modo reperta ad ortus et occaſus veros ſpectant. Quodſi ea requirantur, quae ortibus et occaſibus apparentibus conueniunt, per §. 30. proiiciendi adhuc ſunt circuli horizonti paralleli, in quibus quum ſol verſatur, non impedit, quo minus ſtella ortum vel occaſum faciens conſpiciatur. Eorum

enim et eclipticae interſectiones itidem quaeſita loca dabunt.

§. VIII.

Solutione problematis de temporibus ortuum et occaſuum poëticorum ſtellae alicuius planiſphaerii vniverſalis ope inueſtigandis expedita ad ſolutionem eiusdem problematis planiſphaerii particularis ſubſidio perficiendam vt accedamus, ratio a nobis ſuſcepta poſtulat. Haec autem ſolutio, quae praeter poli eleuationem aſcenſionem rectam et declinationem ſtellae propoſitae datas eſſe requirit, ita inſtituitur.

Radio ZH pro lubitu aſſumto e centro Z deſcribitur circulus HORW horizontem referens, et ducuntur duae eius ſub angulis rectis ſe decuſſantes diametri HR, OW, quarum vna HR interſectionem planorum horizontis et meridiani nec non proiecturam meridiani ipſam, altera OW autem ſectionem communem planorum horizontis et verticalis primarii ſimulque proiecturam verticalis primarii ipſam exhibeat. Deſignatis deinde per §. 8. et 9. libelli ſaepius laudati ad datam poli eleuationem proiecturis aequatoris OQW et poli ſupra horizontem eleuati P, quem boreum ponimus, ducitur per §. 30. circulus BSD, proiectura circuli a ſtella propoſita in conuerſione mundi deſcripti, id quod ob notam ſtellae declinationem praeſtare in procliui erit. Fig. I. et II.

Vt iam locus, quem ſol in ecliptica ſtella ortuum vel occaſuum quemque faciente tenet, inueniatur, deſcribitur per §. 31. circulus PSM locum ſtellae S, quam, Fig. I. in horizonte ortiuo, Fig. II. in horizonte occiduo ponit, transiens et declinationis circulum repraeſentans. Ab eius et aequatoris ſectione M inde per §. 27. abſcinditur verſus occidentem arcus aequatoris MF, aſcenſionem rectam datam metiens, vt obtineatur punctum aequinoctii verni F. Per illud deinde ſe-

cundum praecepta §. 45. ducitur circulus FG proiecturam aequatoris WQO ſub angulo obliquitati eclipticae aequali interſecans et eclipticam exhibens. Huius denique et horizontis interſectione L et G innoteſcunt loca ſolis quaeſita, quorum illa, quae Fig. I. ſiſtit, ad ortus veros, et L quidem ad matutinum, G vero ad veſpertinum, ea autem, quae Fig. II. exhibet, ad occaſus veros, L videlicet ad veſpertinum, atque G ad matutinum, pertinent.

Sed temporibus ortuum et occaſuum apparentium inueniendis per §. 30. proiiciuntur inſuper circuli horizonti paralleli IVKT, in quibus ſol eam depreſſionem attingit, quam habere debet, vt ſtella ad eandem cum ipſo vel aduerſam partem meridiani in horizonte poſita conſpici queat. Quo facto loca ſolis ortibus et occaſibus viſibilibus congruentia illorum circulorum et eclipticae interſectionibus T et V dantur, quae quorſum referenda ſint, ex iis, quae modo attulimus, abunde patet.

§. IX.

Miſſis iam planiſphaeriis, quandoquidem eorum vſum in ſolvendo problemate de temporibus ortuum et occaſuum poëticorum ſtellae alicuius indagandis pro inſtituto noſtro ſat copioſe expoſuimus, ad problematis praedicti ſolutionem calculi ſubſidio pertexendam progredimur.

Methodus ſolutionis autem duplex eſt, prout ſtellae poſitio aequatoris vel eclipticae reſpectu datur.

Fig. I. In caſu priori, in quo aſcenſio recta FM et declinatio SM dantur, ad punctum eclipticae L vna cum ſtella exoriens inueniendum in triangulo ſphaerico SOM ad M rectangulo ex noto latere SM et angulo SOM, altitudini aequatoris aequali, quaerendum eſt latus OM, differentia aſcenſionalis ſtellae pro data habitatione. Hac ab aſcenſione recta FM in caſu figu-

rae, quae ſtellam in hemiſphaerio polum eleuatum complectente collocat, ablata, innoteſcit aſcenſio obliqua ſtellae propoſitae FO. In triangulo FOL igitur dantur anguli FOL et OFL, quorum ille ſupplementum altitudinis aequatoris HOQ, hic obliquitas eclipticae eſt, vna cum latére comprehenſo FO. Inde inueniuntur latus FL, in caſu figurae, aſcenſionem obliquam FO quadrante minorem referentis, diſtantia puncti orientis L a puncto aequinoctii verni F, et angulus orientis FLO. Cognito autem puncto oriente habetur absque negotio locus ſolis ortui vero tam matutino quam veſpertino reſpondens. In triangulis deinde LXT, GVY ad X, Y rectangulis ex angulo orientis XLT=VGY et arcu viſionis XT vel YV eruendum eſt intervallum apparitionis LT vel GV, quod longitudini puncti orientis L additum locum ſolis T ortui matutino apparenti congruentem, a longitudine vero puncti ex adverſo ſtellae occidentis G demtum locum ſolis V ortui veſpertino viſibili conuenientem praebet.

Prorſus eodem modo inueniuntur loca ſolis cum occaſibus ſtellae quum veris tum apparentibus coniuncta ex deſcenſione eius obliqua FW, quae in caſu ſtellae verſus polum eleuatum declinantis, quem figura exhibet, ſumma aſcenſionis rectae FM et differentiae aſcenſionalis MW eſt. Fig. II

Hisce praefatis haud difficulter conſtare poteſt, ſi eleuatio poli dicatur φ, obliquitas eclipticae ε, aſcenſio recta ſtellae propoſitae α, declinatio eiusdem δ, differentia aſcenſionalis Δ, longitudo puncti eclipticae vna cum ſtella emergentis L et angulus orientis, ϑ, haberi

$$\sin\Delta = \tang\varphi \tang\delta$$

$$\tang L = \frac{\cos\varphi \sin(\alpha - \Delta)}{\cos\varepsilon \cos\varphi \cos(\alpha - \Delta) - \sin\varepsilon \sin\varphi}$$

$$\cos\vartheta = \cos\varepsilon \sin\varphi + \sin\varepsilon \cos\varphi \cos(\alpha - \Delta)$$

Ad arcum L ope secundae formulae ex sua tangente perfecte determinandum formulis modo prolatis adiungenda est aequatio

$$\sin \vartheta \sin L = \cos \varphi \sin (\alpha - \Delta)$$

in qua autem affectionem functionis sin ϑ respectu signi nosse oportet. Nec enim perpetuo angulus ϑ 180 gradibus minor est, neque semper positiuus manet seu perinde iacet, vt in figura, cui formulae praecedentes sunt superstructae, sed pro habitationibus zonarum frigidarum interdum negatiuus fit, interdum 180° excedit, semicirculo eclipticae, qui in zona frigida boreali ad austrum, in australi ad boream vergit, infra horizontem cadente. Vt igitur in quolibet casu anguli ϑ species, vtpote non satis functione cos ϑ determinata, pernoscatur, in subsidium vocanda est declinatio puncti eclipticae culminantis, quae si dicatur w, habemus

$$\tan w = \tan \varepsilon \sin (\alpha - \Delta - 90^\circ)$$
$$= - \tan \varepsilon \cos (\alpha - \Delta)$$

hinc

$$\cos \vartheta = \frac{\cos \varepsilon}{\cos w} \sin (\varphi - w)$$
$$= \frac{\cos \varepsilon}{\cos w} \cos (90^\circ - \varphi + w)$$

atque ϑ erit similis ipsi $90^\circ - \varphi + w$, quum hic arcus et angulus ϑ in triangulo rectangulo, a meridiano, horizonte et ecliptica formato, sibi inuicem opponantur.

In sphaeris extra zonas frigidas minimus anguli ϑ valor est 0, maximus 180° graduum, vti facile deprehenditur: pro illis ergo sin ϑ vsquequaque valorem positiuum habet, atque sin L et sin $(\alpha - \Delta)$ eodem signo affectos esse oportet, vt consict aequatio

$$\sin \vartheta \sin L = \cos \varphi \sin (\alpha - \Delta).$$

Eadem affectio functionis ſin ϑ obtinet pro habitationibus zonae frigidae borealis, quando $\alpha - \Delta$ in altero vel tertio quadrante verſatur, pro habitationibus zonae frigidae auſtralis vero, cum $\alpha - \Delta$ in primo vel ultimo quadrante exiſtit.

In his igitur caſibus omnibus non neceſſe eſt, vt reſpiciatur ad arcum $90° - \varphi + w$, ſed ſuperſederi poteſt computatione ipſius w. Quo autem computus ſecundum formulas ſupra datas commodius inſtitui queat, adſumatur in auxilium angulus ζ eiusmodi, vt ſit

$$\cot \zeta = \cot \varphi \cos(\alpha - \Delta) \text{ ſeu } \tang \zeta = \frac{\tang \varphi}{\cos(\alpha - \Delta)}$$

Quo reperto habetur

$$\tang L = \frac{\cos \zeta}{\cos(\zeta + \varepsilon)} \tang(\alpha - \Delta)$$

$$\cos \vartheta = \frac{\sin(\zeta + \varepsilon)}{\sin \zeta} \sin \varphi$$

$$\tang \vartheta = \frac{\cot(\zeta + \varepsilon)}{\cos L}$$

Longitudo puncti orientis L ſic inuenta extemplo notas reddit longitudines, quas ſol in ortibus ſtellae veris habet. Sunt eae nimirum L et $180° + L$, quarum illa locum a ſole occupatum ſtella ortum matutinum faciente, haec autem eundem ſtella ortu veſpertino oriente determinat.

Poſito nunc arcu viſionis $= \gamma$, et interuallo apparitionis $=$ a erit

$$\sin a = \frac{\sin \gamma}{\sin \vartheta}$$

et longitudo ſolis in ortu ſtellae matutino apparenti $= L + a$, in ortu eius veſpertino viſibili autem $= 180° + L - a$.

Vt longitudo puncti eclipticae cum ſtella coocci-dentis, quam per L′ deſignabimus, et angulus occidentis, quem ϑ' denotet, ex deſcenſione ſtellae obliqua $\alpha + \Delta$ inueniantur, opus tantummodo eſt animaduerti, aſcenſionem obliquam puncti eclipticae eodem momento, quo ſtella infra horizontem deſcendit, ſupra eum emergentis eſſe $180^\circ + \alpha + \Delta$, et longitudinem eiusdem $180^\circ + L'$. Quodſi ergo in formulis ortui conuenientibus in locum τῶν $\alpha - \Delta$, L et ϑ ſubſtituantur $180^\circ + \alpha + \Delta$, $180^\circ + L'$ et ϑ' reſpectiue, obtinebuntur eae, quae in occaſum quadrant et ita ſeſe habent

$$\text{tang}\, L' = \frac{\cos \varphi \,\text{ſin}\, (\alpha + \Delta)}{\cos \varepsilon \cos \varphi \cos (\alpha + \Delta) + \text{ſin}\, \varepsilon \,\text{ſin}\, \varphi}$$

$$\cos \vartheta' = \cos \varepsilon \,\text{ſin}\, \varphi - \text{ſin}\, \varepsilon \cos \varphi \cos (\alpha + \Delta)$$

aequatio autem hisce formulis ad perfectam ipſius L determinationem adiicienda eſt

$$\text{ſin}\, \vartheta' \,\text{ſin}\, L' = \cos \varphi \,\text{ſin}\, (\alpha + \Delta)$$

Species anguli ϑ' etiam hic diiudicari debet ex altitudine puncti eclipticae culminantis. Deſignata ſcilicet declinatione puncti illius per w′, erit

$$\text{tang}\, w' = \text{tang}\, \varepsilon \,\text{ſin}\, (\alpha + \Delta + 90^\circ)$$
$$= \text{tang}\, \varepsilon \cos (\alpha + \Delta)$$

$$\cos \vartheta' = \frac{\cos \varepsilon}{\cos w'} \cos (90^\circ - \varphi + w')$$

atque ϑ' ſimilis arcui $90^\circ - \varphi + w'$.

In ſphaeris zonae torridae et vtriusque temperatae angulus ϑ terminis 0 et 180° continetur: quare pro illis ſin ϑ' ſemper valoris poſitiui eſt, eademque affectio functionis ſin ϑ' locum habet pro habitationibus zonae frigidae borealis, quando $\alpha + \Delta$ in primum aut vltimum quadrantem incidit, pro habitationibus zonae frigidae auſtralis autem quum $\alpha + \Delta$ in alterum aut tertium quadrantem cadit.

In casibus modo memoratis necesse non est, rationem ipsius w' haberi, sed sufficit angulum ϑ' per cosinum suum determinare.

Adsumto nunc in subsidium angulo μ huiusmodi, ut sit

$$\text{tang}\,\mu = \frac{\text{tang}\,\varphi}{\cos\,(\alpha+\Delta)}$$

habetur

$$\text{tang}\,L' = \frac{\cos\mu}{\cos\,(\mu-\varepsilon)}\,\text{tang}\,(\alpha+\Delta)$$

$$\cos\vartheta' = \frac{\sin\,(\mu-\varepsilon)}{\sin\mu}\,\sin\varphi$$

$$\text{tang}\,\vartheta' = \frac{\cot\,(\mu-\varepsilon)}{\cos L'}$$

Longitudine puncti occidentis L' hoc pacto inventa, longitudo solis in occasu vespertino vero stellae propositae est idem ipse arcus L', in occasu matutino vero eius autem $180° + L'$.

Determinetur porro interuallum occultationis a' ope formulae

$$\sin a' = \frac{\sin\gamma}{\sin\vartheta'}$$

et longitudo solis in occasu stellae vespertino visibili erit $L' - a'$, verum in occasu matutino apparenti $180° + L' + a'$.

§. X.

Monstrato hactenus, quomodo ascensione recta et declinatione stellae alicuius datis tempora ortuum et occasuum poëticorum ipsius inuestiganda sint, transimus nunc ad commonstrandum, qua ratione idem praestari possit, longitudine ac latitudine stellae datis, qui fuit casus posterior in §. praec. memoratus.

Fig. I. et II. Primum itaque in triangulo ſphaerico EPS ex datis lateribus ES, EP, quorum illud diſtantia ſtellae a polo eclipticae boreo, hoc diſtantia polorum eclipticae et aequatoris eſt, atque angulo ab iis comprehenſo PES, diſtantia circuli latitudinis ſtellae et coluri ſolſtitiorum, quaerantur latus PS, diſtantia ſtellae a polo mundi et angulus poſitionis ESP. Tum in triangulo PSR ad R rectangulo ex latere PS, modo reperto et latere PR, eleuatione poli, inueniatur angulus PSR, qui in caſu Fig. I. ſtellam in horizonte ortiuo referentis, angulo poſitionis ESP auctus, in caſu Fig. II. autem ſtellam in horizonte occiduo exhibentis, eodem diminutus angulum ESR a circulo latitudinis et horizonte comprehenſum praebet. In triangulo denique LSN ad N rectangulo ex latere SN, latitudine ſtellae, et angulo LSN = ESR quaeratur angulus orientis vel occidentis SLN = HLG et latus LN, differentia longitudinum ſtellae et puncti orientis vel occidentis, qua cognita et ipſa longitudo puncti orientis et occidentis innoteſcit.

Solutio modo indicata, vocatis longitudine ſtellae λ, latitudine β, angulo poſitionis σ, et ſeruatis, quibus hucusque uſi ſumus, denominationibus, formulis comprehenditur iamiam in medium proferendis.

Inueniatur arcus auxiliaris u eiusmodi, vt ſit

$$\tang u = \tang \varepsilon \sin \lambda$$

et erit

$$\sin \delta = \frac{\sin(\beta + u)}{\cos u} \cos \varepsilon$$

$$\cot \sigma = \frac{\cos(\beta + u)}{\sin u} \tang \lambda$$

$$\cos \sigma = \cot(\beta + u) \tang \delta$$

quibus formulis aequatio

$$\cos \delta \sin \sigma = \sin \varepsilon \cos \lambda$$

ſubiungenda eſt, vtpote quae arguit, in ſignis deſcendentibus angulum poſitionis fieri negatiuum ſiue contra cadere, ac in aſcendentibus.

Denotatis nunc angulo, qui ab horizonte et declinationis circulo comprehenditur, per χ, arcubus vero, quibus longitudo ſtellae a longitudinibus puncti orientis et occidentis differt per d et d′, habetur

$$\sin \chi = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta}$$

$$\tang d = \sin \beta \tang (\chi + \sigma)$$

$$\cos \vartheta = \cos \beta \sin (\chi + \sigma)$$

$$\tang \vartheta = \frac{\tang \beta}{\sin d}$$

$$L = \lambda - d$$

$$\tang d' = \sin \beta \tang (\chi - \sigma)$$

$$\cos \vartheta' = \cos \beta \sin (\chi - \sigma)$$

$$\tang \vartheta' = \frac{\tang \beta}{\sin d'}$$

$$L' = \lambda + d'.$$

Quum vterque angulorum ϑ et ϑ' in ſphaeris zonae temperatae borealis intra limites 0 et 90°, in ſphaeris zonae temperatae auſtralis autem intra limites 180 et 90° contineatur, patet arcus d et d′ poſitiuos aut negatiuos eſſe, prout pro illis latitudo β borealis aut auſtralis, pro his auſtralis aut borealis fuerit. Vnde colligitur, generatim in ſphaeris zonarum temperatarum ſtellam, quae latitudinem habet polo eclipticae eleuato cognominem, oriri cum eclipticae puncto antecedente, occidere cum ſequente: quae vero oppoſitam, oriri cum puncto ſequente, occidere cum antecedente. Haec regula tamen minime vniverſalis eſt, neque ad ſphaeras zonae torridae vel alterutrius frigidae extendi debet, in quibus ſtella aliquando

cum puncto eclipticae antecedente, aliquando cum ſequente, et oritur et occidit.

§. XI.

Poſſunt varia adhuc circa ortus occaſusque ſtellarum excogitari problemata, ſed eorum explicatio ad inſtitutum noſtrum non pertinet, ex quo ea tantum attingenda erant, quibus in ſequentibus lemmatum vice vti poſſemus. Redimus ergo, vnde exorſi ſumus, ad locum Virgilii §. II. laudatum et a nobis iam, vti inſcriptio huius ſcriptiunculae promittit, explicandum.

Quaeritur nimirum, quodnam ſit illud ſidus, quod Pleias occidens fugere, et qualis ſit ratio, ob quam id fugere, dicatur.

Priusquam ad ſatisfaciendum huic quaeſtioni accedamus, neceſſe eſt, vt videamus, quid verbum *fugere* ad ſidera translatum ſibi velit. Quod vt eruamus, inueſtigemus oportet ea aſtrorum phaenomena, in quibus aliqua fugae ſimilitudo ineſt.

Ac primum quidem hic nobis occurrit motus primi ſ. communis phaenomenon illud, quo ſidera quaedam aliis prius ad meridianum vel horizontem appelluntur, ideoque praecedunt, alteris ſubſequentibus. Qui tenor ab iis *perpetuo* ſeruatus fictioni fugae locum praebere poteſt, vt ſcilicet ſidus praecedens proxime inſequens et ſimul cum ipſo ſuper horizonte exiſtens fugere ab eoque fugari dicatur. Hoc reſpectu Aratus Leporem a Cane fugari, illumque hunc fugere perhibet, de iis ſic cantans:

Ποσσὶν δ' Ὠρίωνος ὑπ' ἀμφοτέροισι Λαγωὸς
Ἐμμενὲς ἤματα πάντα διώκεται· αὐτὰρ ὅγ' αἰεὶ
Σείριος ἐξόπιθεν φέρεται μετιόντι ἐοικώς,
Καί οἱ ἐπαντέλλει, καί μιν κατιόντα διώκει.

Phaen. 338—341.

vbi quidem cum ratione fugae aſtronomica phyſica ratio ex indole vſuque animalium aſtris nomen dantium petenda peropportune et mirifice congruit.

Eodem illo reſpectu Pleiades Orionem fugere finguntur ab Heſiodo verſibus hisce:

Εἰ δέ σε ναυτιλίης δυσπεμφέλου ἵμερος αἱρῇ,
Εὖτ' ἂν Πληϊάδες, σθένος ὄβριμον Ὠρίωνος
Φεύγουσαι, πίπτωσιν ἐς ἠεροειδέα πόντον —
Op. et D. 618 – 620.

Alterum phaenomenon, quod fugae ſpeciem praebet, eſt occaſus ſideris alicuius, oriente altero. Qui enim *ſemper* ſeſe occultat, quotiescunque alter comparuerit, is hunc vitare et fugere hicque illum terrere et fugare videtur. Duplici autem modo fuga in ſidus, quod oriente alio occidit, cadere poteſt, prout ſcilicet in hac translatione aut ad ortum occaſumque quotidianum aut ad poëticum reſpicitur. Priorem rationem ſecutus eſt Aratus in Scorpione Orionem de caelo fugante:

Ὅς καὶ ἐπερχόμενος φοβέει μέγαν Ὠρίωνα.
Phaen. 636.

Emergente enim illo ſupra horizontem Graeciae hic infra eundem labitur, viciſſimque illum fugit.

Τοὔνεκα δὴ καί φασι περαιόθεν ἐρχομένοιο
Σκορπίου, Ὠρίωνα περὶ χθονὸς ἔσχατα φεύγειν.
Ibid. 646. 47.

Altera ratio obtinet in Virgilii loco

Vere fabis ſatio: tum te quoque, Medica, putres
Accipiunt ſulci, et milio venit annua cura,
Candidus auratis aperit quum cornibus annum
Taurus, et aduerſo cedens Canis occidit aſtro.
Georg. I. 215 — 218.

vbi Canis occaſum veſpertinum faciens Tauro circa idem anni tempus ortu matutino orienti cedere, ſiue, quod eodem recidit, ipſum fugere dicitur.

Explorato ſenſu, ut ita dicam, aſtronomico tribuendo formulae de ſidere fugiente aliud, enumeratisque variis, quibus ea applicari poteſt, caſibus, quaeſtionem ſupra expoſitam adgredi iam licet.

Principio igitur manifeſtum eſt, neque primum neque alterum caſuum, in quibus fuga aſtris affingi poteſt et ſolet, hic obtinere. Quum enim omnia aſtra a piſcibus denominata eam poſitionem in coelo teneant, vt Pleiadas in motu communi praecedant, neque vllum eorum, Pleiadibus ſub horizontem deſcendentibus, aut ad occaſum vergat, aut ſupra horizontem aſcendat, Pleias Piſcem non eo reſpectu fugere dici poteſt, quo eadem ab Heſiodo Orionem, vel Orion ab Arato Scorpionem fugere praedicatur. Tertius ergo caſus ſolus ſupereſt, in quo ortus et occaſus poëticus aſtri fugantis et fugientis ſpectatur, et quem eo facilius et libentius quivis hic admiſerit, quod exemplum eius iam in loco Virgilii modo prolato habuimus.

Neceſſo itaque eſt, Piſcis ſidus, quod Pleias occidens fugere dici poſſit, ſic in coelo collocatum eſſe, vt ortus eius veſpertinus (matutinus enim ex iis, quae modo dicta ſunt, excluditur) ſuper horizonte Romano circa idem fere anni tempus contingeret, quo occaſus matutinus Pleiadis eueniebat. Praeterea res ipſa poſtulare videtur, vt ſidus illud ex eorum numero ſit, quae aliquam apud veteres in deſcribendis temporibus ſignificandisque tempeſtatibus nacta ſunt celebritatem.

Hisce requiſitis nullum ſidus piſcis nomine inſignitum magis reſpondere inuenitur, quam Piſcis notius a Seruio iam hic repertus. Primum enim ortus eius veſpertinus ſuper horizonte Romano praecedebat occaſum matutinum Pleiadis ſpatio temporis haud admodum longo et ei fere aequali, quod inter apparentias Tauri et Canis loco proxime citato memoratas intercedebat, adeo vt Pleias matutine occi-

dens Piscem notium vespertino ortu orientem fugere ex Virgilii ratione recte dici queat. Deinde Piscis notius est inter illa sidera, quorum prae aliis veteres in ἐπισημασίαις s. tempestatum significationibus rationem habuerunt, vti ex Ptolemaei libro *) *de apparentiis stellarum inerrantium* patet, in quo lucidae Piscis notii ortus et occasus ad solem relati, addito simul eorum ex Euctemonis **) Hipparchi, Caesaris et aliorum obseruationibus significatu, diligenter notati sunt.

Quantumuis egregie haec conspirent ad persuadendum, Virgilium, quum Pleiada Piscem fugere caneret, Piscem notium in mente habuisse eumdemque intelligi voluisse, attamen dubium suboriri possit, num Piscis simpliciter de Pisce notio dici queat. Verum enim vero quum Piscis notius solitarius quasi et plane seiunctus sit a geminis istis in zodiaco positis,

---

*) Edito a Petavio in *Vranologio*, quod primum separatim Paris. 1630 prodiit, deinde in Tom. III Operis *de Doctrina Temporum* Amstelod. 1703 recusum est. Introductionem Ptolemaei, quam Petauius praetermiserat, et varias lectiones e codice Saviliano descriptas publicauit Fabricius *Biblioth. Graec.* Lib. IV. c. XIV.

**) Metoni, celebri ἐννεαδεκαετηρίδος s. cycli vndeuiginti annorum conditori coaeuus. Instituerunt autem astronomi post Metonem, vti refert Theon ad Arati Dios. vs. 20., tabulas Gemino (*Isagog.* c. 14) et Vitruvio (Lib. IX. c. 7) παραπήγματα (quod possis reddere *affiches*) dictas in publicum proponere, in quibus de singulis annis periodi nouemdecennalis prognostica, interque ea aëris mutationes insigniores cum ortibus et occasibus siderum coniunctas, in vsum vitae, agriculturae inprimis et rei nauticae (cf. Achillis Tatii *Isagog.* in Arat. art. 39) euulgabant. Ex his parapegmatis dein scriptores rei rusticae libris suis, quantum in rem esse ipsis visum fuit, inseruere.

ille omnino intelligendus eſt, vbi de piſce, tamquam aſtro, ſingulari numero tantum ſit mentio, niſi adiuncta aliud ſuadeant. Comprobatur hoc tum loco Manilii:

At quum ſe patrio producet ab aequore Piſcis,
In caelumque ferens alienis finibus ibit; reliq.

Astron. V. 394 et ſeqq.

tum etiam Ovidii

— — *Quotiesque repellit*
Ver hiemem, Piſcique Aries ſuccedit aquoſo.

Metam. X. 165.

In illo enim de notio Piſce agi, inde manifeſtum eſt, quod alibi iam (IV. 574) de influxu piſcium geminorum in horoſcopo conſtitutorum in recens natos fuit ſermo: hunc vero vt de alterutro piſce in zodiaco collocato explicemus, facit commemoratio Arietis, ſideris, quod et ipſum in zodiaco poſitum Piſci utique ſuccedit. Adde, quod Aratus ad Piſcem notium deſignandum nudo Ἰχθύος vocabulo vſus eſt, dum, *Cancro exoriente,* inquit:

Δύνει μὲν Στέφανος, δύνει δὲ κατὰ ῥάχιν Ἰχθύς.

Phaen. 572.

vbi in Ciceronis et Germanici Phaenomenorum verſionibus pro Graeco Ἰχθὺς ſolum Latinum *Piſcis* legitur. At locum de Piſce notio exponere, ratio ab Arato in deſcribendo ſiderum ortu et occaſu inita (cf. verſ. 559 - 568), modusque occidendi ipſe, verſ. 575 et 76 depictus, iubent. Quocirca inter ſidera, quae Cancer exoriens obſcurat ſiue ad occaſum impellit a Feſto Avieno (Arat. Phaen. verſ. 1081) *Auſtri incola, Piſcis* ab Hygino autem (Aſtron. IV. 12.) diſerte *Piſcis notius* nominatur. Ne quis vero aliquid poëtici modo, quo vocabulum Ἰχθύος adhibuit Aratus, ſubeſſe opinetur, obſtant eiusdem vſus exempla apud ſcriptores proſaicos, veluti Eratoſthe-

nem. Hic enim suae Piscis notii descriptioni (*Catasterism.* c. 38) nil nisi verbum Ἰχθύς praemisit, et similiter Pseudoeratosthenes apud Petauium in Vranolog. vocabulum istud sine vllo apposito bis (p. 258 C et p. 259. A) de notio Pisce usurpauit.

Restat difficultas adhuc tollenda in adiecto epitheto *aquosi*. Sed si accipiatur pro imbrifero, aquas denuntiante, id quod vsui dicendi conuenit, admodum eximie in Piscem notium quadrat.

Nam in Ptolemaei libro supra laudato ortus lucidae Piscis notii tam vespertinus hic postulatus *), quam matutinus **) occurrit cum significatu pluuiae et stillantis imbris, adeo vt iste piscis iure meritoque a Virgilio pluuiam denuntians praedicari potuerit. Haec Pisci notio adtributa potestas, in ortu suo imbres ciendi, est quoque causa, cur poëta Pleiada istud sidus vitantem repraesentauerit. Etenim quum ipsa munere perfungeretur ortu suo primam aestatis partem, amoenissimum anni tempus, annunciandi et quasi adducendi, Piscem notium, qui hiemis et caeli pluuii tristis nuncius existebat, non potuit non auersari: quare in ortu eius sese recipiebat, tristiorque ipsa in hibernas vndas descendebat.

§. XII.

Nihil iam restat, quod ad confirmandam explicationem, quam huc vsque tradidimus, adhuc addi

---

*) Is in parallelo horarum XV i. e. sub eleuatione poli 40° 56′ secundum Ptolemaeum die XIX mensis Thoth, cui in Calendario Romano respondet XVI Cal. Octob., eueniebat.

**) Vid. quae ad diem XVIII mensis Pharmuthi i. e. Id. April. et ad diem IX mensis Pachon i. e. IV Non. Mai. adnotata sunt.

possit, quam indicium temporum, quibus apparentiae Tauri, Canis et Piscis in duobus Virgilii locis memoratae super horizonte Romano i. e. sub eleuatione poli 41° 54′ primo anno Iuliano, ad quem sine dubio Caesaris constructum erat parapegma *), contingebant. In iis autem computo eruendis hoc modo versatus sum. Longitudines stellarum e catalogo Mayeriano subductis 25° 32′ 8″, quibus aequinoctia ab anno 45. a. C. inde vsque ad annum 1800 p. C. secundum calculos Ill. Zachii retrocesserunt, deduxi, latitudines earum vero e Ptolemaei catalogo desumere, quam e recentiori aliquo, correctione ob mutatam eclipticae obliquitatem adhibita, deriuare malui. Obliquitatem denique eclipticae primo anno Iuliano conuenientem itidem ex Ill. Zachii ratione statui = 23° 44′. Sic sequentes obtinui valores quantitatum supra designatarum:

Pro lucida Pleiadum.	Pro Cane maiori.	Pro lucida Piscis notii.
λ = 31° 40′	= 75° 48′	= 305° 30′
β = 3 40 B**)	= 39 10 A	= 23 0 A
δ = 15 38 B	= 16 5 A	= 41 15 A
σ = 20 50	= 5 54	= 18 7
χ = 43 54	= 44 2	= 62 39

Ex hisce valoribus ortui et occasui communibus derivantur sequentes determinationes:

*) Caesaris libros *de astris* laudant Macrobius Saturn. Lib. I. c. 16. et Plinius in indice libri XVIII: illis vero parapegma intextum vel annexum fuisse demonstrant ea, quae Plinius Libr. XVIII, et Ptolemaeus in libro supra allegato inde proferunt.

**) Petita est haec latitudo ex μεγάλ. συντάξ. libr. VII. c. 3.

Pro ortu lucidae Pleiadum.	Pro ortu lucidae Piscis notii.	Pro occasu lucidae Pleiadum.	Pro occasu Canis maioris.
$d = 7° 43'$	$= -67° 24'$	$d' = 1° 34'$	$= - 26° 22'$
$L = 23\ 57$	$= 12\ 54$	$L' = 33\ 14$	$= 49\ 26$
$\vartheta = 25\ 31$	$= 24\ 41$	$\vartheta' = 66\ 59$	$= 61\ 24$

Statuto nunc arcu visionis pro stellis primae magnitudinis, quando ad easdem partes meridiani cum Sole constitutae sunt, $= 12°$, pro stellis tertiae magnitudinis autem sub eadem conditione $= 14°$, invenitur pro Cane $a' = 13° 42'$, pro lucida Pleiadum vero, $a = 34° 10'$. Hinc locus solis in occasu Canis vespertino apparenti incidit in 5° 44′ ♉, in ortu lucidae Pleiadum matutino visibili in 28° 7′ ♉. Illum occupabat sol III. Cal. Mai. hunc XI. Cal. Iun. Prior determinatio prope congruit cum illa, quam Ptolemaeus in libro antea laudato exhibet. Namque secundum ipsum Canis in parallelo horarum XV i. e. sub eleuatione poli 40° 56′, a qua altitudo poli Romae haud multum distat, die III mensis Pachon i. e. IV Cal. Mai. absconditur *). Posterior determinatio comparationem non inuenit, quia Ptolemaeus Pleiadum apparentias neglexit **).

Ex tabella praecedenti deriuantur porro absque negotio tempora ortus vespertini veri lucidae Piscis notii nec non occasus matutini veri lucidae Pleiadum. Ille scilicet eueniebat Sole in 12° 54′ ♎ existente, hic

---

*) Plinius (Libr. XVIII. c. 29) Canem eodem die, quo Ptolemaeus, occidere tradit, Columella (Lib. IX. c. 2) eum Pridie Cal. Mai. se vespere celare dicit.

**) Plinius (Lib. II. c. 47) exortum Vergiliarum in 25° ♉ (totidem partibus Tauri, quot antea Aquarii nominatae) fieri perhibet; errat autem in tempore inde eliciendo. Ponit enim ex falsa, quam Lib. II. c. 19. et Lib. XVIII. c. 25 tradit opinione, aequinoctia et solstitia fieri in octavis partibus signorum, VI Id. Mai. loco XIV Cal. Iun.

eodem versante in 3° 14′ ♏; quibus locis respondent VIII Id. Octobr. et V Cal. Nouembr. Dies postremo nominatus idem ipse est, qui a Varrone et Columella occasui matutino Pleiadum adtribuitur, et quem Virgilium etiam respexisse probabile est.

Quodsi iam ponamus, eum pariter de vero ortu Piscis notii cogitasse, quum veteres ἐπισημασίας suas non minus crebro ad veros ortus et occasus, quam ad visibiles direxerint, idem fere temporis interuallum inter apparentias Pleiadis et Piscis notii ac inter φάσεις Tauri et Canis interponitur. Verum nec differentia euadit magni momenti, si poëta ortum vespertinum apparentem in mente habuisse dicatur. Nam statuendo arcum visionis pro stellis primae magnitudinis, quum soli ex aduerso positae sunt, = 8°, reperitur pro lucida Piscis notii a = 19° 29′; proinde ortus eius vespertinus visibilis eueniebat sole in 23° 25′ ♍ haerente i. e. XIII Cal. Octobr. s. die XXII mensis Thoth: quae determinatio paullum recedit a ratione Ptolemaei, eidem ortui in parallelo horarum XV diem XIX. mensis Thoth assignantis.

Vtracumque tandem sententia de ortu Piscis notii palmam tulerit, illud tamen certum est, Piscem notium Romae, die quo occasus matutinus Pleiadum fiebat, vesperi supra horizontem ortiuum haud multo eleuatum sese ostendisse, id quod ad dicendum, Pleiadem ab ipso fugari, sufficit.

§. XIII.

Priusquam huic commentationi finis imponatur, ne quid in ea desideretur, haud ab re fuerit, virorum doctorum, qui in explicando, circa quem nostra versatur opella, loco, diuersam ab hic proposita rationem secuti sunt, sententias exponere. Tentarunt autem varios difficultatis, quam sibi reperire visi sunt, tollendae modos, quos ordine recensebimus. Quidam igitur

ex iis, fugam dumtaxat sideri, aliud in motu occasuque diurno anteuertenti, adtribui putantes, quoniam eo pacto fugam in Pleiadem, vt quae Piscem notium non praevertat, verum subsequatur, non cadere intellexerunt, aut locum omnino *inextricabilem* pronuntiarunt, itaque nodum dissecarunt potius quam soluerunt, sicut Petauius *) et Kaestnerus **), aut Pisci notio aliud sidus Pleiada in motu diurno sequens et ab aqua denominatum substituerunt, quemadmodum Ruaeus, qui Hydram huc intrusit, aut denique Petauii et Kaestneri, virorum in rebus mathematicis exercitatissimorum, auctoritate inducti ab omni explicatione e re astronomica petenda abstinuerunt, lucem loco ex poëticis rationibus quaerentes, vti nostrates Heynius ac Vossius. Alii verba Seruii super loco nostro ad ortum occasumque generalem s. diurnum trahentes, quum nec sic Pleiadem a Pisce notio fugari ipsumque vicissim fugere dici posse animaduerterent, siderum eorum, quae occidente Pleiade oriuntur, vnum vel alterum, cui quodammodo nomen piscis indi possit, Piscis notii locum capere iusserunt, veluti Delphinum aut Scorpionem, quorum ille a Musonio atque de la Cerda, hic a Drydenio in subsidium vocatus est. Tandem nupertime Horsleius libello singulari de duobus temporibus mellationi a Virgilio constituti commentatus ***), vers. 234 et 235 ortum Pleiadi

*) Variar. dissertatt. ad Vranolog. Lib. II. c. 9.

**) In epistola de loco nostro ad Heynium scripta quae in huius tert. edit. Virgilii Tom. I. p. 638 exta quae ex Riccioli Almagesto adduxit, paullulum detorsit, vir alioquin perspicacissimus, Ricciolo sententiam perabsurdam affingens.

***) On Virgil's two Seasons of Honey .... by Samuel Horsley. Lond. 1805. Vid. relat. in diario litterario Goettingensi 1807. 18. Stück.

vespertinum s. acronychum indicari et per sidus Piscis aquosi alterutrum piscium geminorum, quorum ortus matutinus s. heliacus Romae circa idem fere tempus ac occasus modo commemoratus Pleiadis contingebat, significari censet.

In refellendis hisce opinionibus non est, quod multi simus. Pauca quaedam tantum admonuisse sufficiet. Deerrarunt a vera explicationis via viri docti, quum non modo omnes casus supra euolutos, in quibus fuga sideri alicui potest et solet adscribi, ante oculos non habuerint, verum etiam locum alterum, in quo Virgilius apparentias Canis occidentis et Tauri emergentis eodem respectu coniunxit, vt altero occasum Pleiadis et ortum Piscis, in comparationem adhibere neglexerint. Hic enim iam ab Hartmanno Beyer *), Maestlino **) atque adeo ab illis ipsis viris recte expositus, poterat ac debebat eos in viam reducere. Ceterum sua quaeque interpretationum prolatarum premitur difficultate. Sic, qui Delphinum sub Piscis nomine intelligi voluit, rationem situs sphaerae, qui Romae obtinet, non habuit. Horsleii sententiae, ex qua mellatio altera itidem in tempus vernum incideret, obstant *hibernae vndae*, in quas Pleias descendere praedicatur, id quod et ipse vir doctissimus sensit, et frustra conatus est diluere.

---

*) Quaestion. in libellum de Sphaera Joan. de Sacro Busto. Francofurti 1556. p. 149.

**) Epitom. Astronom. Tubingae 1610 (ed. alt.) p. 254.

II.

DE INSCRIBENDO TRIANGVLO SPECIEI AC MAGNITVDINIS DATAE IN CIRCVLVM POSITIONE ET MAGNITVDINE DATVM:

AD EXPLANANDVM

LOCVM IN PLATONIS DIALOGO, QVI INSCRIBITVR MENO, p. 86. e. — p. 87. b.

Socrates eo, quem titulus indicat, loco quaeſtionem, vtrum virtus doceri poſſit nec ne, geometrarum more, adſumta quadam de vi atque natura virtutis hypotheſi, tractaturus, vt Menonem huic diſputandi generi praeparet, exemplum e Geometria depromtum adfert, in quo ſcilicet, quid ſit ex hypotheſi contemplari, demonſtret, quodque his continetur verbis ipſius:

λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ὧδε, ὥσπερ οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνται, ἐπειδάν τις ἔρηται αὐτούς, οἷον περὶ χωρίου, εἰ οἷόντε ἐς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι.

Ante omnia animaduerti conuenit, hic non de modo ſoluendi problematis alicuius, ſed potius de poſſibilitate ſolutionis quaeri. Ea autem inueſtigatur analyſi, i. e. fingendo, factum iam eſſe, quod faciendum proponitur, atque per ea, quae inde conſequuntur, progrediendo, donec perueniatur ad aliquid, quod in poteſtate ſit. Hac ratione deteguntur ſimul caſus, in quibus propoſitum fieri poteſt, in quibus non, quorum diſtinctio et enumeratio apud Graecos geometras διορισμὸς *) audit.

Quod iam ad quaeſtionem geometricam a Socrate exempli gratia allatam attinet, illa definiri poſtulatur, num datum triangulum dato circulo queat inclu-

*) Vid. Pappi Collect. mathem. libr. VII. praef. — Secundum Proclum (comment. in Libr. prim. Euclid. p. 19) Leon εὗρε διορισμὸν, πότε δυνατόν ἐστι τὸ ζητούμενον πρόβλημα, καὶ πότε ἀδύνατον·

di, h. e., ei sic applicari et superponi, vt verticibus angulorum trianguli in circumferentiam circuli cadentibus quodlibet trianguli latus parti peripheriae subtendatur.

Vt eruatur conditio, sub qua problema de inscribendo triangulo datae magnitudinis circulo dato generaliter acceptum solutionem inuenit, contemplemur triangulum quodcumque ABC, cuius latera angulis A, B, C subtensa comparate dicantur a, b, c, et quod circulo, cuius radius per r designabitur, inscriptum sit. Quodsi iam distantia centri circuli a medio basis, quam sumamus latus b esse, dicatur z, perpendiculum autem e vertice trianguli B in basin demissum h, habetur segmentis baseos perpendiculo diuisae per f, g denotatis

$$\text{I)}\quad ff + hh = aa$$

$$\text{II)}\quad gg + hh = cc$$

$$\text{III)}\quad f + g = b$$

$$\text{IV)}\quad rr = \tfrac{1}{4}bb + zz = (f - \tfrac{1}{2}b)^2 + (h - z)^2$$
$$= (\tfrac{1}{2}b - g)^2 + (h - z)^2.$$

Ex IV) efficitur

$$1)\quad 2hz = ff + hh - bf$$

$$2)\quad 2hz = gg + hh - bg$$

quibus aequationibus additis fit

$$4hz = 2hh + ff + gg - b(f+g)$$
$$= 2hh + ff + gg - (f+g)^2 \quad \text{(III.)}$$
$$= 2hh - 2fg$$

siue $2hz = hh - fg$

hinc $z = \dfrac{hh - fg}{2h}$

et $zz = \dfrac{h^4 - 2fghh + ffgg}{4hh}$

proinde $rr = zz + \tfrac{1}{4}bb$

$$= zz + \frac{ff + 2fg + gg}{4}$$

$$= \frac{h^4 + ffhh + gghh + ffgg}{4\,hh}$$

$$= \frac{(hh + ff)\,(hh + gg)}{4\,hh}$$

$$= \frac{aacc}{4\,hh}$$

$$\text{et } r = \frac{ac}{2\,h}$$

vnde eſt $2\,r \times h = a \times c$.

Ad inſcribendum igitur triangulum datae magnitudinis circulo dato requiritur, vt rectangulum, quod ſub diametro circuli et perpendiculo ab aliquo trilateri angulo in latus ſubtenſum demiſſo continetur, aequale ſit rectangulo ſub lateribus angulum iſtum comprehendentibus contento *).

Hinc deriuantur abſque negotio determinationes diuerſis triangulorum generibus competentes.

1) Si datum triangulum fuerit rectangulum eiusque hypotenuſa b, erit $aa + cc = bb$
i. e. ob I) II) et III) $ff + gg + 2\,hh = ff + 2\,fg + gg$
hinc $hh = fg$
et $aa = ff + fg = bf$, $cc = gg + fg = bg$
ergo $aacc = bbfg = bbhh$, $ac = bh$
atque $r = bh : 2\,h = \frac{1}{2}\,b$.

---

*) Demonſtratio mere geometrica huius theorematis ſi deſideretur, ſignetur punctum, in quo perpendiculum baſi occurrit, D et alter finis diametri, E, iungaturque recta AE. Quo facto triangulum ABE triangulo BDC ob angulos EAB, BDC rectos et angulum AEB (Elem. III. 21) aequalem angulo BCA aequiangulum erit, quare (Elem. VI. 4) BD : BC = BA : BE, quae eſt ipſa theorematis enunciatio. — Vid. The elements of Euclid by Robert Simſon B. VI. Prop. C. Thom. Simpſon's Elements of Geom. B. III. Theor. XXV. Legendre Eléments de Géom. Liv. III. Prop. XXXII.

Oportet igitur, diametrus circuli, cui datum triangulum rectangulum inſcribendum eſt, hypotenuſae aequalis ſit, quae quidem determinatio ex notiſſima propoſitione, qua angulus in ſemicirculo rectus eſſe demonſtratur*), ſponte conſequitur.

2) Sit datum triangulum aequicrurum, baſin habens b. Quia igitur $a = c$, eſt

$$2\,r = \frac{aa}{h}$$

Vtrumlibet ergo crurum aequalium media proportionalis eſt inter perpendiculum e vertice trianguli in baſin demiſſum et diametrum circuli datum triangulum circumſcribentis. Recta igitur in alterutra baſis extremitate ad perpendiculum cruri adiacenti inſiſtens, vbi producta fuerit, ſecat perpendiculum e vertice trianguli in baſin demiſſum itidemque productum in altero diametri fine, cuius rei ratio facile ex propoſitione ſub nr. 1. commemorata deducitur.

3) Si datum triangulum aequilaterum ſiue $a = b = c$ ſit, habetur ex I) et II)

$$f = g$$

et ex III) $f = g = \frac{1}{2}\, b = \frac{1}{2}\, a.$

hinc $hh = aa - ff = \frac{3}{4}\, aa$

et $h = \frac{1}{2}\, a\sqrt{3}$

proinde $r = \frac{aa}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

ſiue $rr = \frac{1}{3}\, aa.$

Radius ergo circuli, cui datum triangulum aequilaterum inſcribendum eſt, potentia ſubtriplum ſit lateris trianguli, neceſſe eſt**). Huius determinationis ratio haud difficulter etiam ex eo, quod ſub nro. 2. de inuenienda diametro circuli triangulum aequicrurum includentis annotauimus, intelligitur.

---

*) Elem. III. 31. **) Elem. XIII. 12.

Agedum videamus iam, quomodo, quem Socrates vel potius Plato disputantem introduxit, geometres quaestionem propositam tractet. Socrates in sermone, cuius initium supra positum est, ita pergit:

εἴποι ἄν τις, ὅτι οὔπω οἶδα, εἰ ἔστι τοῦτο τοιοῦτον· ἀλλ' ὥσπερ μέν τινα ὑπόθεσιν προὔργου οἶμαι ἔχειν πρὸς τὸ πρᾶγμα τοιάνδε· εἰ μέν ἐστι τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον, οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ, οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ, ἄλλο τι συμβαίνειν μοι δοκεῖ· καὶ ἄλλο αὖ, εἰ ἀδύνατόν ἐστι ταῦτα παθεῖν.

Quicumque verborum εἰ μὲν ἐστι... reliq. sit sensus, id tamen satis patet ac perspicuum est, nullam in iis omnino mentionem fieri radii vel diametri circuli expositi, sed omnia ad datum triangulum referri. Hinc efficitur, verbis istis non efferri conditionem, sub qua datum triangulum dato circulo includere liceat, sed proprietatem quandam, alicui triangulorum generi conuenientem enunciari, id quod res ipsa quoque poscit, si quidem exemplum prolatum ad eam facere debeat. Geometer igitur a Platone inductus determinationem, quam supra de omnibus triangulorum speciebus demonstratam dedimus, ignorat, nec nisi certa de trianguli genere hypothesi adsumta definire scit, an datum triangulum dato circulo circumcludi possit: quod quidem verbis, quae sequuntur, ὑποθέμενος μὲν οὖν .... εἴτε μή, liquidissime confirmatur.

Res nunc eo est deducta, vt indagetur, quaenam sit illa proprietas, quae vtrum dato triangulo competat nec ne, ante scire cupit geometres Platonicus, quam quaestionem sibi propositam soluat. Inquiramus ergo in eius verba paullo diligentius.

Ac statim quidem in promtu est coniicere, geometram de re geometrica loqui scienter, h. e., verbis

solemnibus; at quum bene monente Kaestnero*) ipse Euclides in elementis vtatur orationis genere, quod non multum a vulgari consuetudine sermonis recedat, ratio loquendi a geometra Platonico in familiari colloquio vsurpata multo propius ad quotidianum sermonis usum accedere putanda est. Et quamquam Euclides supra centum annos post Platonem vixerit, licebit tamen vtriusque locutiones illustrandi gratia inter se conferre, dummodo, ne id ad singula verba pertineat, caueamus. Eo enim modo instituta comparatio errori foret obnoxia, quod ex his, quae iam subiicientur, manifestum fiet.

Plato, vti Sauilius in praelectionibus in principium elementorum Euclidis Oxonii habitis**) refert, punctum, quod apud Euclidem σημεῖον audit, ςιγμὴν vocat, vocabuloque ἐπιπέδου vbique fere generalem subiicit significatum superficiei, quam quidem Euclides ἐπιφάνειαν dicit, illo verbo ad designandum planum vsus. Quin in eo ipso, cui locus noster inest, dialogo recta linea vocatur simpliciter γραμμή, quam cum Euclide magis definite distincteque εὐθεῖαν appellaueris, atque in loco, quem tractamus, de figura circulo inscribenda ἐντείνειν occurrit, pro quo Euclides ἐγγράφειν habet. Illud nimirum eo spectat, vt figura loco mota circulo superponatur vel superponi cogitetur, hoc ad descriptionem eius in circulo pertinet. Atque in universum vocabula Platonica sensibus magis, quam Euclidea, accommodata reperies.

Sed vt ad propositum reuertamur, ex eo, quod

---

*) Ueber Kunstwörter in Eberhardi diario: Philosophisches Magazin B. IV. S. 257 u. folg.

**) Cf. quae inde Kaestnerus excerpsit Gesch. der Math. B. 3. S. 19 u. folg. — Prauum vocabuli ἐπιπέδου vsum arguit iam Proclus ad Elem. I. def. 7. pag. 32. Commentar.

Plato ἐντείνειν eodem respectu, quo Euclides ἐγγράφειν, posuit, procliue est colligere, quid sit παρατείνειν χωρίον παρὰ τὴν δοθεῖσαν γραμμήν (praetendere figuram datae lineae). Ad descriptionem figurae nimirum refertur, et nihil aliud esse potest, quam quod Euclides per παραβάλλειν σχῆμα (vel εἶδος) παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν *) (proiicere figuram ad vel iuxta datam rectam) extulit, et ipsius interpretes *applicare figuram ad* vel *secundum datam rectam* reddiderunt. Dicitur autem figura, inprimis parallelogramma, applicata ad datam rectam, quando super ea, tamquam basi vel latere, constructa est. Eadem quoque a Menechmo παρακεῖσθαι παρὰ τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν praedicatur **), apud quem χωρίον παρακείμενον παρὰ τὴν γραμμὴν ergo idem valet, ac χωρίον παρατεταμένον vel παραβαλλόμενον παρὰ τὴν γραμμήν. Est vero applicatio spatiorum frequentis vsus ***) et geometris inde a Pythagoreorum temporibus perquam familiaris, vti testatur Proclus †), cuius ea de re verba hic apposuisse haud alienum ab instituto erit, quae sic sese habent. Ἔστι γὰρ ἀρχαῖα, φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα, ἥτε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις. — ὅτ᾽ ἂν γὰρ εὐθείας ἐκκειμένης τὸ δοθὲν χωρίον πάσῃ τῇ εὐθείᾳ συμπαρα-

*) Elem. I. 44.

**) Apud Eutocium in Commentar. in Archimedis lib. II. de Sphaera et Cylindro p. 18 edit. Basileens. et p. 142. edit. Oxoniens.

***) Vid. Robert Simson ad Elem. VI. 28 et 29, qui ob omissas, tanquam nullius vsus, has propositiones grauiter editores quosdam reprehendit.

†) Ad Elem. I. 44. pag. 109.

βαλεῖν *) ἐκεῖνο τὸ χωρίον **) φασὶν, ὅτ' ἂν μεῖζον δὲ ποιήσῃς τοῦ χωρίου τὸ μῆκος αὐτῆς τῆς εὐθείας, τότε ὑπερβάλλειν, ὅτ' ἂν δὲ ἔλασσον, ὡς τοῦ χωρίου γραφέντος εἶναί τι τῆς εὐθείας ἐκτὸς, τότε ἐκλείπειν· καὶ οὕτως ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ καὶ τῆς ὑπερβολῆς ὁ Εὐκλείδης μνημονεύει καὶ τῆς ἐλλείψεως· i. e. ſecundum translationem Franciſci Barocii: Antiqua quidem ſunt haec, aiunt Eudemi familiares***), Pythagoricaeque Muſae inuenta, applicatio vtique ſpatiorum, et exceſſus atque defectus. — Quum enim, propoſita recta linea, datum ſpatium toti rectae coaptaueris, tunc ſpatium illud applicari dicunt: quum vero ſpatii longitudinem ipſa recta linea maiorem feceris, tunc excedere, quum autem minorem, ita vt ſpatio deſcripto aliqua extra ſit rectae lineae pars, tunc deficere. Et hoc modo Euclides in ſexto libro tum exceſſus, tum defectus mentionem facit.

Propoſitiones libri ſexti, in quibus Euclides defectus atque exceſſus mentionem facere a Proclo perhibetur, ſunt 27, 28 et 29 †). Ex duabus prioribus videre eſt, quid ſit in loco noſtro ἐλλείπειν χωρίῳ τινί. Quum enim apud Euclidem habeatur ἐλλείπειν εἴδει παραλληλογράμμῳ, quod valet deficere parallelogrammo, ſenſus formulae ἐλλείπειν χωρίῳ τινὶ obuius eſt. Verbum ἐλλείπειν in ea, ſicut Latinum

---

*) Num forte ex ſequentibus ſubaudiendum vel ſupplendum ποιήσῃς?

**) Lacuna hic obuia per παραβάλλεσθαι explenda videtur.

***) Rectius ſine dubio Commandinus ad Elem. I. 44 vertit: vt ait Eudemus. Hic enim hiſtoriam geometriae compoſuerat.

†) In datis quoque defectus et exceſſus mentio ſit, prop. 58 et 59.

deficere, passiuam significationem habet, cuius vsus passim extant exempla *). Contrarium eius ὑπερβάλλειν χωρίῳ τινὶ est excedere spatio aliquo. Quo autem melius intelligatur ratio defectus atque excessus illius, haud inconsultum fuerit, eam paullo accuratius explicare, praesertim quum inde haud parum lucis loco, circa quem versamur, affundatur.

Quando igitur parallelogrammum A E F D super recta AB sic constitutum est, vt basis eius AE totam rectam AB non exaequet, sed tantummodo pars sit illius, tunc quidem parallelogrammum AEFD ad rectam AB applicatum dicitur, verum cum defectu, qui et ipse parallelogrammum est, videlicet BEFC, quod cum priori AEFD latus EF commune et basin suam BE basi prioris AE in directum adiectam cumque illa totam rectam AB conficientem habet. Quum autem parallelogrammum AGHD super recta AB constitutum parte BG baseos AG supereminet rectam AB, etiam tum parallelogrammum AGHD ad rectam AB applicatum dicitur, sed cum excessu, parallelogrammo scilicet BGHC, cui latus BC cum parallelogrammo excedente AGHD commune est, basis vero pars illa BG, quae a basi prioris AG ablata rectam AB relinquit.

Hisce declaratis verba: εἰ μέν ἐστι τοῦτο τὸ χωρίον .... si accusatiuus παρατείναντα **) pro casu absoluto habeatur, Latine sic reddenda sunt:

---

*) Hogeveen ad *Viger.* pag. 189. Notanda est constructio cum datiuo, cuius exempla in lexicis desiderantur. cf. tamen Matthiae Gramm. §. 404. p. 549.

**) Sequor Gedikium, qui accusatiuum casum interdum absolute poni, quo iure nescio, contendit, suum-

Si hoc ſpatium *) eſt tale, quale **) ſi quis ad datam eius lineam ***) applicauerit, deficiat ſpatio †) tali, quale eſt illud ipſum applicatum, aliud mihi accidere videtur, etc....

vel paullo liberius et explicatius:

Si hoc triangulum eſt eiusmodi, vt, quod ad datam eius baſin applicaueris triangulum ſimile, deficiat triangulo ſimili ei ipſi, quod applicatum eſt, aliud quid mihi euenturum videtur, aliud vero etc.....

Quae verba vt recte exponantur, meminiſſe oportet, parallelogrammorum, quorum alterum ad datam rectam applicatum deficere dicitur, alterum ipſius defectus ſeu complementum audit, latus unum eſſe commune, baſes vero ſibi inuicem in directum adiacentes, unde fit, ut ex ambobus tertium conflētur parallelogrammum ſuper recta ab initio data, tamquam baſi, conſtitutum. Eadem enim in triangulis, quorum unum ad datam rectam applicatum deficere altero dici debebit, locum habere neceſſe eſt.

---

que παρατείνοντα, quod ſenſu nequaquam uſitato, ſed ficto, in locum ipſius παρατείναντα ſubdidit, ſic interpretatur, tamquam ſi caſus abſolutus ſit. Serranus videtur legiſſe παρατείναντι, quod eodem modo ac παρατείναντα, i. e. abſolute, verum meliori forſan iure, accipiendum. Exempla datiui ſic vſurpati habentur in Matthiae Gramm. §. 390., inter quae illud ex Thuc. II. 49. inprimis attendendum.

*) τοῦτο τὸ χωρίον ſcil. τρίγωνον.

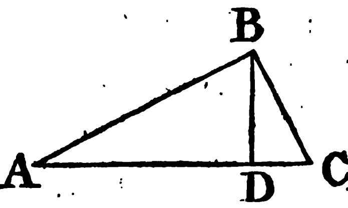
**) οἷον pro ὥστε τοιοῦτον, ſic vt Latinorum *qualis* pro *vt talis*. Cf. Broederi Gramm. §. 512. τοιοῦτον autem Plato iam ſupra p. 82. d dixit, quod apud Euclidem ὅμοιον audit.

***) γραμμὴ poteſt eſſe baſis vel latus. In colloquio Socratis cum puero Menonis ſimpliciter de latere quadrati vſurpatur.

† χωρίον hic vtique triangulum ſignificat, ſicut in illis, quae antecedunt, εἰ μὲν ἐστι τοῦτο τὸ χωρίον..., reliq.

Iam verborum iſtorum hancce dare licet expoſitionem:

Si datum triangulum ABC eſt eiusmodi, vt, quod ad datam eius baſin AC applicaueris triangulum ſimile *) ABD, deficiat triangulo BDC ſimili ei ipſi, quod applicatum eſt, ABD, aliud quid mihi euenturum videtur, aliud vero... reliq.



Nunc vero exiſtit quaeſtio de genere trianguli, cui proprietas verbis modo prolatis indicata competat. Reſponſum ad eam dabimus expreſſum theoremate, cui demonſtrando praemittimus ſequens

LEMMA

Si e vertice trianguli ABC ad baſin AC ducta fuerit recta BD quomodocumque, erit

$$\frac{AB^q \times DC}{AC} + \frac{BC^q \times AD}{AC} = BD^q + AD \times DC.$$

---

*) Triangulum applicandum primo quidem adſpectu non niſi ſpecie (Dat. 40.) dari videtur, ſed reuera et magnitudine datur. Quoniam enim conſtructo illo e triangulo ABC relinqui oportet aliud triangulum, quod cum illo latus commune habeat, et baſin ſuam baſi illius in directum adiectam, nihil reſtat, niſi vt recta e vertice trianguli ABC, ad baſin AC protenſa fiat latus commune. Quo conſtituto cogitur, vt recta AB ſit alterum latus trianguli applicandi. Quare, quum triangulum ABD ſpecie datum ſit, datur etiam (Dat. 52.) magnitudine.

Ducta BD aut perpendicularis eſt ad baſin AC aut non.

Sit primum perpendicularis, erit (Elem. I. 47) $AB^q = BD^q + AD^q$; $BC^q = BD^q + DC^q$. Fiat $BD : AD = AD : e$; ergo eſt (Elem. VI. 17) $AD^q = BD \times e$, hinc $BD^q + AD^q = BD^q + BD \times e =$ (Elem. II. 3. converſ.) $BD \times \overline{BD+e}$. Similiter, ſi fiat $BD : DC = DC : f$, eſt $BD^q + BC^q = BD \times \overline{BD+f}$. Fiat denuo $AC : DC = BD : g$, quia $AB^q : \frac{AB^q \times DC}{AC} = AC : DC$, erit $BD : g = BD \times \overline{BD+e} : \frac{AB^q \times DC}{AC}$, proinde $\frac{AB^q \times DC}{AC} = g \times \overline{BD+e} =$ (Elem. II. 1.) $BD \times g + e \times g$. Eadem ratione, ſi fiat $AC : AD = BD : h$, eſt $\frac{BC^q \times AD}{AC} = BD \times h + f \times h$. Quocirca habetur $\frac{AB^q \times AD}{AC} + \frac{BC^q \times AD}{AC} = BD \times g + BD \times h + e \times g + f \times h =$ (Elem. II. 1) $BD \times \overline{g+h} + e \times g + f \times h$. Sed erat $AC : DC = BD : g$, et $AC : AD = BD : h$, hinc *inuertendo* (Elem. V. 4. cor.) $AD : AC = h : BD$, et *ex aequo* $AD : DC = h : g$, proinde *componendo* (Elem. V. 18) $AC : DC = g+h : g =$ (Elem. V. 11) $BD : g$; ergo eſt $g+h = BD$, et $BD \times \overline{g+h} = BD^q$. Rurſus, quia $AD^q = BD \times e$ et $DC^q = BD \times f$, eſt $e : f =$ (Elem. VI, 1) $BD \times e : BD \times f = AD^q : DC^q = (AD : DC) + (AD : DC)$. Sed erat $g : h = DC : AD$ eſt igitur $e \times g : f \times h =$ (Elem. VI. 23) $(e : f) + (g : h) = (AD : DC) + (AD : DC) + (DC : AD) = AD : DC$, proinde *componendo* (Elem. V. 18) $e \times g + f \times h : f \times h = AC : DC = (AC : BD) + (BD : DC) = (AD : h) + (DC : f) =$ (Elem. VI.

23) $AD \times DC : f \times h$. Quocirca est $e \times g + f \times h = AD \times DC$. Atqui demonstratum est, esse $BD \times \overline{g+h} = BD^q$. Ergo est $BD \times \overline{g+h} + e \times g + f \times h = BD^q + AD \times DC$: quocirca et $\frac{AB^q \times DC}{AC} + \frac{BC^q \times AD}{DC} = BD^q + AD \times DC$.

Sit nunc BD non ad perpendiculum basi AC. Demissis iam ex A et C perpendiculis in rectam BD productam, erit (Elem. II. 12. 13) $AB^q - AD^q - BD^q = 2BD \times DE$; $DC^q + BD^q - BC^q = 2BD \times DF$, hinc $AB^q - AD^q - BD^q : DC^q + BD^q - BC^q = 2BD \times DE : 2BD \times DF =$ (Elem. V. 15) $BD \times DE : BD \times DF =$ (Elem. VI. 1) $DE : DF$. Verum propter angulos AED, DFC rectos et angulum ADE (Elem. I. 15) aequalem angulo CDF triangula ADE, CDF sunt aequiangula, proinde (Elem. VI. 4. V. 16) $DE : DF = AD : DC$. Ergo (Elem. V. 11) $AB^q - AD^q - BD^q : DC^q + BD^q - BC^q = AD : CD =$ (Elem. VI. 1) $AD^q : AD \times DC$, hinc (Elem. V. 12) $AB^q - BD^q : BD^q + CD^q - BC^q + AD \times DC = AD^q : AD \times DC =$ (Elem. VI. 1. V. 11) $AD \times DC : DC^q$, proinde (Elem. V. 19. 11) $AB^q - BC^q - AD \times DC : BD^q - BC^q + AD \times DC = AD \times DC : DC^q =$ (Elem. VI. 1) $AD : DC$, *componendo* igitur (Elem. V. 18) $AB^q - BC^q : BD^q - BC^q + AD \times DC = AC : DC$. Fiat $AC : DC = AB : k =$ (Elem. VI. 1) $AB^q : AB \times k$, et $AC : DC = BC : l =$ (ibid.) $BC^q : BC \times l$, erit (Elem. V. 11) $AB^q : AB \times k = BC^q : BC \times l$, hinc (Elem. V. 19) $AB^q - BC^q : AB \times k - BC \times l = AB^q : AB \times k = AC : DC = AB^q - BC^q : BD^q - BC^q + AD \times DC$. Quare $BD^q - BC^q + AD \times DC = AB \times k - BC \times l$. Sed $BC^q =$ (Elem. II. 2) $BC \times l + BC \times \overline{BC - l}$. Ergo (Elem. I. ax. 2) $BD^q + AD \times DC = AB \times k +$

$BC \times \overline{BC-l}$. Erat autem $AC : DC = BC : l$, proinde *conuertendo* (Elem. V. 19. cor.) $AC : AD = BC : BC-l =$ (Elem. VI. 1) $BC^q : BC \times \overline{BC-l}$. Quare est $BC \times \overline{BC-l} = \frac{BC^q \times AD}{AC}$. Est quoque $AB \times k = \frac{AB^q \times DC}{AC}$, ergo $AB \times k + BC \times \overline{BC-l} = \frac{AB^q \times DC}{AC} + \frac{BC^q \times AD}{AC} = BD^q + AD \times DC$ Q. E. D.

Lemma hoc est Roberti Simsoni, qui id in *Apollonii locis planis* a se *restitutis* Lib. II. Lemm. 10. cas. 2 et Append. Lemm. 3 (p. 261 et 353 versionis Germanicae) proposuit atque demonstrauit. Demonstratio aliter quoque adornari potest et quidem paullo simplicius, quam hic factum est, adhibito scilicet perpendiculo, quod e vertice trianguli in basin demittitur. Verum enim vero quia sic tres casus, perpendiculo isto vel intra vel extra triangulum vel etiam in latus alterutrum cadente, distinguendi forent, demonstrationem breuiorem et istas ambages euitantem praetuli. Cf. quoque *Geometrie de Position par* Carnot art. 196 et Collectio geometrica, quae insignita titulo paullo speciosiori: *Ausführliches Lehrgebäude der elementaren und der höhern Geometrie* Th. 1. Halis 1798 prodiit, p. 316 et seqq.

Sequitur iam, quod supra promisimus,

THEOREMA

Si applicato ad datam basin AC trianguli ABC triangulo deficiente ABD, quod simile sit toti ABC, defectus BDC similis existit ipsi deficienti ABD, triangulum ABC, cui simile deficiens applicatum est, erit rectangulum.

Etenim quia triangulum ABD simile est triangulo ABC, erit (Elem. VI. 19) $\Delta ABC : \Delta ABD = BC^q : BD^q$. Sed est quoque (Elem. VI. 1) $\Delta ABC : \Delta ABD = AC : AD$, quare (Elem. V. 11) $AC : AD = BC^q : BD^q$ hinc $BD^q = \frac{BC^q \times AD}{AC}$.
Eodem concludendi modo ex eo, quod triangulum BDC (Elem. VI. 21) simile est triangulo ABC, efficitur, vt sit $BD^q = \frac{AB^q \times DC}{AC}$. Proinde est $\frac{AB^q \times DC}{AC} + \frac{BC^q \times AD}{AC} = 2 BD^q =$ (vi Lemmat. praec.) $BD^q + AD \times DC$, ergo $BD^q = AD \times DC$. Sed erat $BC^q : BD^q = AC : AD$, est igitur $BC^q : AD \times DC = AC : AD =$ (Elem. VI. 1) $AC \times DC : AD \times DC$, quare $BC^q = AC \times DC$. Eadem ratione est $AB^q = AC \times AD$. Quocirca erit $AB^q + BC^q = AC \times AD + AC \times DC =$ (Elem. II. 2) AC^q, angulus ABC igitur (Elem. I. 48) rectus. Q. E. D.

Ex iis, quae modo tradita sunt, facile hoc quoque colligitur, angulorum ADB, BDC vtrumuis esse rectum, et rectam BD perpendicularem basi AC. Quoniam enim $BD^q = AD \times DC$, hinc (Elem. VI. 17) $AD : BD = BD : DC$, ergo latera AD, BD trianguli ABD lateribus BD, DC trianguli BDC, similis priori ABD, proportionalia, anguli ADB, BDC, circa quos sunt latera proportionalia, inter se aequales erunt, hinc (Elem. I. def. 10) vterque eorum rectus, et BD perpendicularis basi AC.

Theorema praecedens ita quoque licet enunciare. Si triangulum ABC ducta e vertice ad basin recta BD diuidatur in partes ABD, BDC et toti ABC et sibi inuicem similes, triangulum istud ABC rectangulum erit, et ducta recta hypotenusae perpendicularis.

Hoc pacto ſtatim patet, theorema noſtrum eſſe propoſitionem 8 lib. VI. Elem. conuerſam, unde ſequitur, vt, quae ibi de triangulo rectangulo enunciata ſunt, huic ſoli competant.

Geometres igitur a Platone inductus tantum ſub hypotheſi trianguli rectanguli determinare poteſt, datumne triangulum in dato circulo aptari queat, nec ne. Praetermiſſa quidem eſt haec determinatio noſtro loco, at non ſine cauſa ac ratione. Quum enim exemplum geometricum eo ſolum adiunctum ſit conſilio, vt, quid ſit ἐξ ὑποθέσεως σκοπεῖσθαι, declararetur, illa determinatio utique locum non habebat, ſed ſupervacanea fuiſſet, ſi adiecta eſſet.

Ad confirmandam, quae modo tradita eſt, explicationem facit id, quod determinatio deſcriptionis vel incluſionis trianguli rectanguli in circulo, quae, vt ex ſuperioribus intelligitur, ſimpliciſſima omnium eſt, Platonem haud facile fugere potuit, licet eas, quae aequilatero aut iſoſceli triangulo conueniunt, vtpote complicatiores eoque reconditiores, cognitas non habuerit. Nam, referente Diogene Laertio *) Thales Mileſius iam circuli triangulum rectangulum deſcripſerat, h. e. repererat, norma circulo ſic applicata, vt acumen circumductam tangat, ancones diametri extremitates pertranſire, ſeu angulum in ſemicirculo rectum eſſe. Meminit quoque Ariſtoteles **) huius circuli proprietatis tanquam notiſſimae.

Sed vt explicatio, a me hic propoſita, quantum in me ſitum eſt, omnibus numeris abſoluatur, duabus, quae moueri poſſunt, quaeſtionibus adhuc reſpondendum eſſe video. Quaerere nimirum licet,

---

*) In vita Thaletis.

**) Vid. loca mathem. Ariſtotelis apud Heilbronnerum in *Hiſtor. matheſ. vniuerſ.* §.57 et 143.

primum quaenam verisimiliter sit caussa, quamobrem Plato exemplum illustrandi gratia appositum potius de includendo dato triangulo in datum circulum, quam de quapiam alia effectione, v. c., de constructione trianguli dato triangulo similis ex tribus rectis datis, vbi etiam hypothesi *) locus est, desumere maluerit? deinde vero, cur idem in exprimenda hypothesi circa genus trianguli dato circulo includendi indirectum et per ambages ducentem modum directo ac simplici praetulerit?

Ad prius quod attinet, causa in ipso Platone sita est. Neminem enim fugere potest, quantopere ille figurarum geometricarum insignibus ac mirificis proprietatibus captus fuerit atque delectatus, vt qui earum contemplationi, quasi negotio animae proprio et germano, lubentissime se dederet, illasque ad rerum in natura maxime abstrusarum explicationem adhiberet. Est autem theorema istud, quod angulum in semicirculo rectum esse arguit, sane elegans, vtpote quo omnium omnino triangulorum rectangulorum, quae super eadem basi seu hypotenusa constitui possunt, quorum est infinita multitudo, constructio continetur. Ac declarata quoque est satis illius praestantia ab antiquitate eo, quod inuentorem eius bouem immolasse tradidit. Quare minime mirum videri debet, quod idem illud Platoni adeo placuerit, vt ex eo pendens problema omnibus aliis in exemplum vertendis anteferret.

Ad alterum nunc venio, ac rationem, quare Plato triangulum rectangulum potius proprietate eius

*) Hypothesis in hoc casu esset: Si duae harum rectarum vtcunque sumtae reliqua sunt maiores, tunc quidem aliud quid casurum est, etc.

ſupra allata, ex qua illud haud ſine negotio aliquo agnoſcitur, quam ſimplici nota anguli recti deſcripſerit, exponere aggredior. Inuenio autem eam in ſtudiis, quae Platonis tempore atque ipſius impulſu geometras occupatos tenebant. Quorum quidem ratio vt clarius liqueat, eam paullo altius repetamus, neceſſe eſt.

Pythagoras igitur inuento, quod ipſius nomen gerit, theoremate geometris viam duplicandi quadrati *) vel generatim inueniendi quadratum, quod ſit ad aliquod datum, vt unitas ad numerum, oſtenderat, eoque ſimul theoriam magnitudinum incommenſurabilium **) aperuerat. Inde transitione

---

*) Methodus, quam Plato in dialogo noſtro, p. 84. e — 85. a, huic problemati ſoluendo adhibuit, admodum ſimplex eſt. Conſtruitur quadratum, cuius latus duplum eſt lateris quadrati propoſiti, quodque adeo quadruplum eſt quadrati propoſiti. Hoc dein ductis diagonalibus quatuor quadratorum, ex quibus componitur, biſariam diuiditur. Opus autem eſt diagonales ſic duci, vt eae, quae ſunt in quadratis conterminis, non ſiant parallelae, neque omnes in eodem puncto medio concurrant. Eadem methodo quadrilaterum quodcumque biſariam diuidi poteſt, biſſecando nimirum latera et iungendo biſſectionum puncta ſibi inuicem proxima rectis, quae parallelogrammum conſtituent, quod dimidium eſt quadrilateri propoſiti. — Platonis rationem duplicandi quadratum laudat Vitruuius lib. IX. praef. Ceterum hoc quoque exemplum monſtrat Platonis ſtudium circa ea, quae mirabile et ſingulare aliquid habent, cuiusmodi eſt quadrati duplicatio, quippe quae lineis quidem confici et expediri poſſit, numeris autem inueniri et explicari nequeat, id quod et Socrates cum Menonis puero colloquens haud obſcure ſignificauit.

**) Simpliciſſimum et notiſſimum huiuscemodi linearum exemplum praebent diagonalis (diameter) et

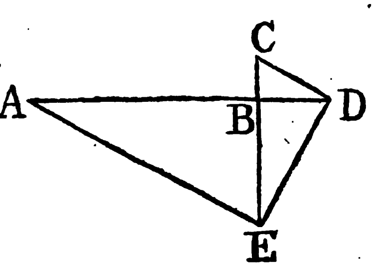
ad solidas figuras facta geometrae methodum quaesiuerunt duplicandi cubum, qui inter solidas figuras eumdem, quem quadratum inter planas, tenet locum. Multis, vt facile est coniectura adsequi, frustra tentatis, Hippocrates Chius tandem hoc problema ad illud, quo inter duas rectas datas duae quaeruntur mediae proportionales deduxit, h. e. invenit, solutionem eius haberi, si in potestate sit, duas medias proportionales inter duas rectas, quarum una latus ipsum cubi, altera duplum huius lateris sit, inuenire. Problemati eum in modum, quo ab initio propositum erat, expresso, quum aliquantisper neglectum esset, nouum dein ac magnum momentum additum oraculo Apollinis Delii, qui, quanam ratione pestis diu atque acriter Delios ceterosque Graecos vrgens auerti posset, consultus ea fini duplicationem arae suae, cui forma erat cubica, praeceperat *). Hinc Plato, ad quem res delata est, occasionem reperit, Graecos neglectus geometriae insimulandi, cui tollendo non modo omnes sui aeui geometras ad soluendum problema, cuius ex tracta-

---

latus quadrati, quarum ratio in numeris ea est, quam $\sqrt{2}$ ad 1 habet. Haec earum incommensurabilitas argumento est, lineas non componi ex indiuisibilibus, sicut olim quidam opinabantur, et hodie etiam nonnulli autumant, quorum sententiam iam Aristoteles illo argumento redarguit. — Cf. etiam dicta in annotatt. praeced.

*) Inde problema de duplicatione cubi siue de inveniendis duabus mediis proportionalibus inter duas rectas datas *Deliacum* audit. Historiam eius variasque solutiones quum veterum, tum recentiorum geometrarum, copiose ac pereruditè persecutus est Celeb. Reimer in libro singulari, Göttingae 1798. euulgato.

tione maxima incrementa geometriae acceſſura ſperabat, inſtigauit, verum, quo plus adhortatione ſua proficeret, et ipſe ſolutionem tentauit. Haec quidem ſolutio, quam Eutocius *) ſeruatam nobis tradidit, tota pendet ex ea trianguli rectanguli proprietate, quam noſtro loco geometres, Platonicus hypotheſin ſuam fecit. Ex illa enim ſequitur, perpendicularem BD (vid. fig. antea pag. 46. poſita) ab angulo recto in baſin AC demiſſam eſſe mediam proportionalem inter ſegmenta baſis AD, DC ſeu AD : BD = BD : DC.



Quodſi iam duo triangula rectangula AED, EDC ſuper eodem latere ED et ad easdem partes intelligantur ſic conſtructa, vt hypotenuſae ſeu baſes AD, CE ſint ad angulos rectos ſibi inuicem, baſium ſegmenta AB, BE, BD, BC quatuor continue proportionales exhibebunt, et quidem externa ſegmenta AB, BC binas extremas, interna vero BE, BD binas medias, vtroque ſegmento interno exiſtente media proportionali inter alterum internum atque externum huic in directum et ex aduerſo poſitum, vt ſit AB : BE = BE : BD = BD : BC. Tali autem iunctura et copulatione duorum triangulorum rectangulorum Platonis modus duas medias proportionales duabus datis rectis inueniendi innititur.

*) In commentario ad Archimedis libr. II. de ſphaera et cylindro.

Insignis ergo vsus, quem proportio ex triangulo rectangulo, quod perpendiculo ab angulo recto in basin demisso in duo triangula sibi inuicem et toti similia diuisum est, deducta Platoni in soluendo maximi momenti problemate adtulit, pro causa haberi debet, cur trianguli rectanguli proprietatem, ex qua illa proportio pendet, ad hoc designandum elegerit, Quod autem istam proprietatem aenigmatico modo expresserit, forte ea causa factum est, vt geometris opulentiam disciplinae, quam profiterentur, monstraret, theorematis eximii foecunditate vsus ad insinuandum problema, in quo ex data rei proprietate genus ipsum rei quaeritur.

Quod vero ad scrupulum attinet, quem quis forte in eo offenderit, quod Socrates nostro loco thesin intellectu difficiliorem ea, quam cum Menonis puero tractat, eamdemque circuitione adhibita in medium protulerit, is plane nullus est, facileque tollendus. Primum enim responsum ad interrogationem, quot pedes in latere quadrati duplicati contineantur, quod Socrates primo a puero desiderat, postea autem ipsi condonat ac remittit, pariter arduum est. Deinde vero cogitemus oportet, Socratis cum Menone colloquentis rationem esse aliam, aliam ad puerum Menonis verba facientis, verbaque difficilia non Socratis sed geometrae esse, quorum sensus siue obscurior siue clarior ad rem, cuius causa prolata sunt, perinde se habet.

Restat, vt adhuc de eruditorum, qui nostrum locum explicandum sibi sumserunt, conaminibus circa eum breuiter exponam. Errarunt autem plerique horum virorum in eo, quod verbis, in quibus omnis residet difficultas, *εἰ μέν ἐστι τοῦτο τὸ χωρίον* ...., conditionem, sub qua datum trian-

gulum dato circulo includere liceat, exprimi putarunt, id quod tantundem a vero, quantum a Platonis instituto abest. Hoc in vniuersum praemonito de singulis iam videamus.

Gedikius quidem plane ἀγεωμέτρητος ad nostrum locum accessit. Mutatis χωρίον τρίγωνον in χωρίον τετράγωνον et παρατείναντα in παρατέμνοντα verborum εἰ μέν ἐστι .... sensum effingit hunc: *Si ista figura quadrilatera ita comparata fuerit, vt linea diagonali ducta in duas aequas portiones diuidatur*, reliq.... Vt de vi, a qua interpretationis negotium auspicatus est, nihil dicam, illud tamen minime praeteriri debet, quod verba, quae Gedikius expunctis a se substituit, ea, qua vult, significatione apud geometras haudquaquam occurrunt. τετράγωνον enim de solo quadrato *), non de quavis figura quadrilatera, quae τετράπλευρον audit, vsurpatur, et παρατέμνειν pro δίχα τέμνειν neque ab Euclide, neque Proclo, nec quoquam alio adhibitum repereris. Hoc unum sufficit ad Gedikii, qui in ceteris aeque minus feliciter egit, rationem penitus destruendam.

Eadem facilitate ac breuitate explicationem viri docti, qui primam editionem Berolinensem in Biblioth. Germ. Tom. L. p. 278. recensuit, et Kluegelium **) de nostro loco consuluisse videtur, refel-

*) Manifeste deprehenditur hic significatus in deriuatis τετραγωνίζειν et τετραγωνισμός, quorum vtrumuis de quadrando circulo sexcenties legitur.

**) Cuius sententia de loco, hic tractato, extat in ipsius Lexico mathem. art. *Gröſstes und Kleinſtes* Nr. 12. Tom. II. p. 667.

lere datur. Quamuis enim negari nequeat, παρατείνειν de linea in circulo aptanda dici posse, quod ille vir in sua interpretatione sumit, attamen loco nostro non γραμμήν, sed χωρίον παρατείνειν iubemur.

Michelsenus, verba negotium interpretibus facessentia ad solum triangulum datum pertinere recte vidit, istisque angulum rectum indicari *) coniecit, qua quidem coniectura non omnino falsus fuit, sed modus, quo angulum rectum e verbis istis elicit, erroris plenus est, minimeque probandus. Primo enim παρατείνειν χωρίον παρὰ τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν interpretatur ita, vt sit *extendere spatium* h. e. triangulum expositum ABC (vid. fig. dialogo Menonis nomen ferenti in secunda ac tertia edit. Berolinensi subiuncta) *producendo lineam seu basin eius* AC, deinde vero χωρίον παρατεταμένον vult esse *spatium angulare* BCD extra figuram, inque hoc aperte sibi contradicit, quum ex eo, quod initio assumtum erat, extensum triangulum h. e. spatium angulare BAD esse debeat. Praeterea angulus *c* in triangulo ABC linea AC producta non *relinquitur*, sed ante productionem illam *iam extat*, et cum triangulo ABC a principio datus est. Haec argumenta contra Michelseni explicationem sunt e rebus ducta, omissis iis, quae e verbis petere licet, in quibus illud grauissimum est, quod χωρίον contra vsum loquendi, familiarem geometris, angulum seu spatium angulare infinitum significare sumitur.

---

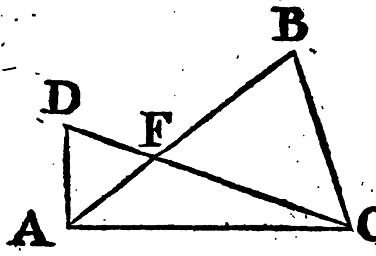
*) Est ista coniectura aliquid, nec tamen rem absoluit, quoniam angulus rectus sine potius triangulum rectangulum non per essentialia, sicut Michelsenus putauit, sed per attributa denotatum est.

Muellerus, qui libello singulari *) locum nostrum enodandum suscepit, multum quidem eruditionis atque acuminis ostendit, attamen nec ipse rem confecit. Quaerit enim in verbis intricatis determinationem inscriptionis trianguli in circulo, quam iis minime inesse supra demonstrauimus. Porro sine codicum auctoritate verbis παρὰ τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν inserit articulum τὴν, post δοθεῖσαν ponendum, mutatque παρατείναντα in ὑποτείναντα et παρατεταμένον in παρατετμημένον. In interpretatione textus hoc modo a se refecti versatur deinde sic. Verbo ὑποτείνειν actiuam potestatem tribuit, iungitque ὑποτείνειν τὴν γραμμὴν αὐτοῦ, quod *ducere hypotenusam ad latus eius* (scilicet trianguli propositi) transfert; ἡ δοθεῖσα autem subaudito διάμετρος ipsi est data circuli diameter: totam denique formulam ὑποτείνειν παρὰ τὴν δοθεῖσαν τὴν γραμμὴν αὐτοῦ de hypotenusa, quae datae circuli diametro aequalis sit, ad latus trianguli ducenda exponit. Verum his plurimum correctionis opus est. Primum enim vox ὑποτείνειν apud geometras, vti ex Elem. I. 4. 6. 18. 19. 26. 47. videre licet, nunquam non passiuae significationis est, et valet *subtensum esse*, eademque nonnisi de linea recta, quae intra crura anguli sic ducta est, ut extremitatibus suis vtrumque crus anguli tangat, minime autem de ea, quae ab extremitate alterius sub angulo quodam deducitur, occurrit. Tum nullo modo concedendum est, per τὴν δοθεῖσαν circuli diametrum innui. Supprimunt quidem, ubi facile suppletur geometrae admodum frequenter voca-

*) *Commentar über zwey dunkle mathematische Stellen in Plato's Schriften, die eine im Theätet, die andere im Meno.* Nürnberg 1797.

bulum γραμμῆς, at vocabuli διαμέτρου ellipsis exemplo destituitur. Praeterea τὸ δοθῆναι semper ad circulum, numquam ad diametrum refertur, vt dicatur ἡ διάμετρος τοῦ δοθέντος κύκλου, nequaquam vero ἡ τοῦ κύκλου δοθεῖσα διάμετρος. Tandem vis praepositioni παρὰ in interpretatione formulae ante allatae adsignata, vt παρὰ τὴν δοθεῖσαν sit: *ad magnitudinem datae* (diametri) an exemplis satis claris adferri possit, dubitandum videtur.

Sed demus Muellero, textum ab ipso bene constitutum recteque interpretatum esse, attamen hypothesis quam elicit, ob mancam suam atque imperfectam formam reiici debet. Est autem illa: *Si triangulum propositum ABC fuerit ita comparatum, vt ducta ad magnitudinem datae circuli diametri hypotenusa CD ad latus eius AC* (i. e. secundum Muelleri explicationem,



constructo triangulo rectangulo ADC, cuius unum latus circa angulum rectum sit AC, quod autem angulo recto subtenditur latus DC, aequale diametro circuli dati) *deficiat tali triangulo FBC, quale est illud ipsum, quod abscissum est, ADF* ..... reliq. Enimvero nemo geometria leuiter tantum imbutus problema: *Ad datam rectam constituere triangulum rectangulum, quod datam habeat hypotenusam*, eo, quo hic factum est, modo extulerit, nec triangulum propositum ABC deficit triangulo FBC, sed quod trianguli rectanguli ADC constructione formatur, AFC, defectu quippe existente FBC. Adhaec triangulum ADF nequit dici abscissum, quum nullam partem trianguli ABC, de quo sermo est, constituat,

trianguli ADC autem, cuius nimirum pars eſt ADF, in antecedentibus nulla omnino fiat mentio. Atque etiamſi oratio hiare, et vitioſe a triangulo ABC ad triangulum ADC tranſilire ſtatuatur, ne ſic quidem triangulum ADF poterit audire abſciſſum, ſed relictum ſ. reliquum debebit praedicari, quoniam abſciſſum eſt AFC. Verum haec ſunt minoris momenti; grauiſſimum illud eſt, quod ipſa hypotheſis, quam Muellerus Platoni ſubiicit, ne in vniuerſum quidem valet, id quod facile ſequenti modo oſtenditur. Sit angulus ACB rectus, ergo aequalis ipſi DAC, erit ADC = DCB et quia inſuper DFA = BFC, triangula BFC et ADF ſunt aequiangula, ideoque ſimilia. Dico iam, circulum circa DC diametrum deſcriptum, qui quidem ob angulum DAC rectum transibit per A, non tranſire per B, niſi ſit AB = DC, proinde et BC = AD. Transeat enim, ſi fieri poteſt, et ponatur AB maior ipſa DC. Quoniam itaque ADC, ABC anguli ſunt in eodem circuli ſegmento, erit ADC = ABC. Sed in triangulis ADF, FBC ſimilibus eſt AF : FD = FB : FC, ergo AB : DC = FB : FC, hinc, quia AB > DC, FB > FC, quamobrem angulus DCB i. e. ADC > ABC, quum tamen ipſi aequalis oſtenſus ſit. Non transibit igitur circulus circa DC deſcriptus per B, ſi AB ſit > ipſa DC, nec itidem, ſi eadem ſit minor ipſa DC. Tranſit ergo per B eo ſolum caſu, quo habetur AB = DC. Ex quo perſpicuum ſit, innumeros dari caſus, vbi quidem triangulum ADF ſimile ſit triangulo FBC, neque tamen triangulum ABC includi poſſit circulo, cuius diameter aequalis eſt DC hypotenuſae trianguli rectanguli ADC ad latus AC conſtructi.

Trembleii extat commentatio ſuper noſtro loco, commentariis Academiae Berolinenſibus ad an-

num 1800 inserta *), quae propter subtilitatem suam et doctrinae copiam omnino legi meretur. Ingeniosissimus auctor videtur tamen opinione iusto maiori, quam de Platonis eruditione mathematica concepit, abripi se passus esse. Dum enim in exemplo geometrico a Socrate prolato Platonem specimen analyseos, cuius inuentionem Proclus et Diogenes Laertius ad illum referunt, exhibere voluisse autumat, quaestionem de inscribendo triangulo in circulo nimis levem, et agrimensore potius quam Platone dignam, iudicat, quin contra de extendendo (i. e. transmutando) spatio triangulari in spatium circulare agi putat, hancque suam sententiam, inprimis eo confirmare studet, quod vocabulum χωρίον ab Euclide et Archimede non aliter, quam vbi areae s. embadi figurae cuiusdam habeatur ratio, vsurpatum sit, et quod ἐντείνειν ab iisdem auctoribus numquam de inscribenda figura aliqua in alteram adhibitum inueniatur. Quaestione ad hanc sententiam correcta interpretationem verborum: εἰ μὲν ἔστι τοῦτο τὸ χωρίον ...., quam Gedikius in sec. editione Berolinensi dederat, stare posse censet, si quidem, quae in ea de quadrilatero enunciata sunt, triangulo tribuantur. Recte enim vidit, τετράγωνον, quod τριγώνου loco Gedikius Platoni obtrudere haud verebatur, idcirco non esse admittendum, quod inscriptio quadrilateri in circulum non sic ab eius per diagonalem bissectione dependeat, vt illa semper procedat, etiamsi haec in potestate sit. Ex Trembleii igitur sententia hypothesin ad diiudicandum, num fieri possit, quod in quaestione faciendum proponitur, requisitam ita efferre oportet: *Si triangulum est eiusmodi figura, qua*

---

*) p. 241 et seqq.

per datam rectam dissecta relinquatur ad unum latus lineae secantis tantum spatii, quantum ad alterum extensum habetur, tunc quidem . . . . . reliq., omnisque textui inferenda mutatio eo redit, vt pro παρατείναντα substituatur παρατέμνοντα, quamquam et illud saluo sensu conseruari posse Trembleius putat, dummodo παρατείνειν χωρίον παρὰ γραμμὴν vertere liceat: *protendere spatium trans lineam*.

In hac expositione quo minus acquiescamus, quae iam in medium prolaturi sumus, impediunt. Primum si de transformatione trianguli in circulum quaereretur, Plato procul dubio pro verbo ἐντείνειν aliud posuisset, quum illud ad significandam figurae alicuius transmutationem in alteram haudquaquam aptum sit, quippe quae apposite magis verbo aliquo cum praepositione μετὰ composito, velut μεταβάλλειν, indicetur. Praeterea dubitatio, quam de vulgari interpretatione verbi ἐντείνειν Trembleius affert, penitus tollitur eo, quod apud Proclum *) non modo ἐντείνειν τρίγωνον εἰς κύκλον, verum etiam ἐντείνειν ὀρθὴν γωνίαν εἰς ἡμικύκλιον habetur, in quarum formularum posteriori manifeste nihil aliud, quam: *includere* vel *inscribere*, significat, proinde quoque in priori ita accipi potest. Tum vt quaestio vniuersalis redderetur, qualem eam statuit Trembleius, debuissent omitti pronomina demonstratiua, saltem id, quod vocabulo κύκλου praemissum est, et quaestio hoc modo proponi: Εἰ οἷόν τε ἐς κύκλον τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον μεταβληθῆναι (siue μετασκευασθῆναι): quamquam dubitauerim, Platonem sic scripturum fuisse, quum aequalitas circuli et trianguli in hoc casu plane

*) pag. 23. edit. Basil.

medio relinquatur, taciteque magis sumatur, quam serte indicata sit. Neque inuenimus, ullum vete-
m geometrarum de transformatione unius figurae
alteram locutum esse, sed problemata ad illam
rtinentia sic fere: Τῷ δοθέντι χωρίῳ ἴσον χωρίον
ρεῖν, vel simili modo, exprimere amant. Ad voca-
li χωρίου vsum deinde quod attinet, omnino negari
bet, quod idem Trembleius euincere nititur, illud
unquam, nisi areae, et eius quidem solius, ratione ha-
:a adhiberi, quum exempla contrarium adstruentia
n desint. Quae inter referendum est illud ipsum,
od Trembleius ex Euclidis Elem. I. 34. adfert, et
rem suam trahere, licet frustra, conatur, quoniam
a pars tertia enunciationis ad aream spectat. Cui
emplo iam a nobis clariora aliquot addantur. In
iclidis Dat. lib. Def. III. est: Εὐθύγραμμα σχήμα-
ι τῷ εἴδει δεδόσθαι λέγεται, ὧν αἵτε γωνίαι δεδο-
ναι εἰσὶ κατὰ μίαν, καὶ οἱ λόγοι τῶν πλευρῶν
ὸς ἀλλήλας δεδομένοι: Propos. LV. autem: Ἐὰν
ωρίον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον ᾖ, καὶ αἱ
λευραὶ αὐτοῦ τῷ μεγέθει δεδομέναι ἔσονται, vbi
ωρίον idem valere ac σχῆμα vel σχῆμα εὐθύγραμ-
ν, quum ex collatione propositionis cum definitio-
facta, tum vero sponte ex eo patet, quod figura
spectu vnius areae specie data dici nequit. Apud
eronem *) similis earumdem vocum permutatio
currit in definitione hic subiecta: Βάσις λέγεται
ιπέδου χωρίου γραμμὴ ἡ ὡσανεὶ κάτω νοουμένη,
λευραὶ δὲ μιὰ τῶν τὸ σχῆμα περικλειουσῶν. Pla-
nis χωρίοι τρίγωνον ergo iure optimo perinde ac

---

*) In libello περὶ τῶν τῆς γεωμετρίας ὀνομάτων, a cum Euclidis Elem. libro primo a Cunrado Dasypodio Argentorati 1570 edito, p. 40.

simplex τρίγωνον vel plenius σχῆμα τρίγωνον accipere licet. Postremo fingamus, verum esse, ab Euclide et Archimede, quos Trembleius inprimis citat auctores, figuram, in qua nihil praeter aream expenditur, semper nomine χωρίου insigniri, attamen inde nihil ad interpretationem loci nostri exsculpi potest, quum, vt supra ostendimus, Platonis verba ad normam loquendi, ad quam illi geometrae vocabulorum vsum direxerunt, haud temere exigenda sint, id quod et ab ipso Trembleio animaduersum quidem, sed nihilominus neglectum est. Abunde sit haec contra Trembleii rationem disputasse, quae non minoribus rerum quam verborum difficultatibus premitur.

Schleiermacherus in sua operum Platonicorum versione *) non dubitat, quin circuli vel diametri eius mentio fuerit iniicienda, quoniam de coaptando triangulo in circulum agatur. Neque in eo falsus est vir eruditus, si quidem Platoni determinatio inscriptionis in circulum, quae in vniuersum triangulorum genus cadit, nota atque explorata fuisse pro certo statuatur. Verum hoc tum per se minus probabile est, tum verbis ὑποθέμενος μὲν . . . . εἴτε μή, manifesto contrarium. Quodsi enim geometra Platonicus determinationem istam habuisset promtam atque apertam, missa omni cunctatione et haesitatione respondere debebat: Si rectangulum sub duobus quibusvis huius trianguli lateribus comprehensum aequale est rectangulo, quod continetur perpendiculo in reliquum trianguli latus ex vertice anguli, cui subtensum est, demisso et circuli diametro, tum quidem triangulum illud dato circulo includi potest. Sin vero rectangulum prius posteriore maius vel minus fuerit, inclusio

*) Tom. II. Vol. I. p. 370 et 517.

desiderata fieri nequibit. Atque hac quidem ratione verbis istis ὑποθέμενος μὲν οὖν ..... supersedere poterat, quae nisi pro inanibus habere velimus, satis aperte ostendunt, geometram non aliter de inclusione trianguli, vtrum scilicet locum habeat nec ne, iudicium ferre posse, quam si proprietatem, quae verbis εἰ μὲν ἐστὶ .... expressa est, dato triangulo conuenire sumserit. Accedit, quod admissa Schleiermacheri sententia similitudo, quae inter exemplum geometricum et rem, cuius illustrandae gratia prolatum est, intercedere debet, funditus perit, repudiata ea, optime conseruatur. Vt enim ad decidendam quaestionem, num virtus doceri possit nec ne, Socrates hypothesi quadam de vi genereque virtutis vtitur, sic geometra responsurus quaestioni, datumne triangulum dato circulo includi queat nec ne, hypothesin super ipso trianguli genere arcessit, quam quidem nullo ad circulum respectu implicitam esse oportere, facile est intelligere. Venio nunc ad interpretationem Schleiermacheri, qui falsa opinione ductus non potuit non locum difficilem male vertere. Vertit autem sic: *Wenn dieses Dreyeck ein solches ist, daſs wenn man um seine gegebene Grundlinie den Kreis herumzieht, noch ein eben solcher Kreis übrig bleibt als der umspannte selbst ist, alsdann dünkt mich wird etwas anderes erfolgen, und wiederum etwas anderes, wenn dieses unmöglich ist.* Haec verba legenti vel audienti, necesse est, extemplo occurrat quaestio, qui fieri possit, vt descripto circa datum triangulum circulo alius relinquatur circulus aequalis ei ipsi, qui circumscriptus est. Profecto opus fuit, vt vir doctissimus explicaret, quid verbis istis sibi vellet. Exponit autem illa in adnotationibus suis sic: *Wenn das gegebene Dreyeck so beschaffen ist, daſs, wenn man die gegebene Grundlinie oder die Hypotenuse desselben* (de triangulo re-

ctangulo enim agi coniectura male quidem fundata, vera tamen assecutus est) *in den Kreis einträgt, solche den Kreis in zwei gleiche Hälften theilt, d. h., sich als Durchmesser zeigt, so . . . u. s. w.* At si Platoni nihil praeter hoc significare in animo fuisset, iure meritoque in reprehensionem veniret, quod non simpliciter dixerit: Si basis vel hypotenusa trianguli expositi aequalis est diametro circuli dati, inclusio fieri potest; sin minus, non efficietur. Ad hoc ex Schleiermacheri mente res aliquo modo tentando peragitur: quod a geometrica ratione maxime est abhorrens. Ceterum locus sinistre interpretatus reddendus erat: *Wenn dieses Dreyeck ein solches ist, dergleichen an der gegebenen Grundlinie desselben entworfen, von eben einem solchen Dreyecke ergänzt wird, als das entworfene ist, so . . . . u. s. w.* vel minus breuiter, at lucidius: *Wenn dieses Dreyeck so beschaffen ist, dass das ähnliche, welches man an der gegebenen Grundlinie desselben entwirft, ein Dreyeck von eben der Gattung zur Ergänzung hat, als das entworfene ist, so . . . . u. s. w.*

III.

DE FORMVLIS AD ABSOLVENDAM DIMENSIONEM TRIANGVLI AEQVILATERI ET SEGMENTI CIRCVLARIS A COLVMELLA LIB. V. CAP. 2. PRAESCRIPTIS

1. Quamquam geometria a veteribus, e quibus soli Graeci hic censendi veniunt, inprimis ex quo Plato ad profundiorem eius tractationem homines aeui sui exhortatus erat, maxime per se et propter se culta est *), nulla commodi, quod inde in vitam communem redundare possit, ratione habita; attamen facile est videre, necessitatem, vt ne omne omnino studium illius ad vsum vitae traducendae omitteretur, fuisse effecturam. Quippe haec ipsa fuit caussa, quare Romani, cum seuerioribus Musis parum conuersantes, geometriae in tantum, quantum ad mensuras agrorum agendas finesque regundos opus est, addiscendae operam darent. Consistit autem magna pars artis,

*) Insigne prorsus atque admiratione summa dignum eius rei exemplum prodidit Archimedes. Hic enim incomparabilis vir, vt Plutarchus in Vita Marcelli refert, tam alto erat animo tantisque theorematum diuitiis praeditus, vt noluerit de his, quibus sibi nomen et opinionem non humani, sed diuini cuiusdam ingenii parauerat, quidquam scribere. Quippe machinarum effectionem omnemque artem, quae necessitati inseruiret, illiberalem et sordidam ratus, in his modo studium suum serio posuit, in quibus pulchritudo et subtilitas nulli commixta necessitati inest. — Quanto theoretices studio duceretur Archimedes, ex hoc quoque perspicitur, quod in memoriam inuenti a se theorematis, e quo cylindrus rectus sphaerae, quam circumscribit, vt soliditate, sic integra superficie, sesquialter est, tumulo suo cylindrum et sphaeram ipsi inscriptam apponi rationemque, in qua inter se sunt illa solida eorumque superficies, adscribi voluerit.

quae in dimetiendis diuidendisque agris, atque vniuerfe in dimenfione rerum corporearum, quae fub aliquam formarum geometricarum cadunt, verfatur, in arithmetices ad geometriam applicatione, quam etfi geometrae antiqui, vt geometriae natiuus fuus color et pulchritudo conftaret *) in tradenda fua difciplina fedulo euitarent, tamen fi quando peculiaris et quafi propria magnitudo alicuius rei inueftiganda incideret, huic fini adhibere non dubitarunt. Quo nomine Archimedes ipfe allegandus eft, qui in libro de circuli dimenfione exemplum huius applicationis reliquit. Sed geometriae practicae, proprie fic dictae, pauca tantum ex antiquitate ad nos transmiffa funt monumenta, eo maioris facienda diligentiusque conquirenda, quo minus fubfidiorum ad penitus cognofcendum, quem ad finem in hoc campo fcientia veterum excucurrerit, nobis fuppetit. Poffunt autem hae reliquiae perquam commode in duo genera diftribui, quorum vnum ea menfurandi praecepta, quae auctores in tranfitu atque aliud agendo, illuftrandi folum gratia, protulerunt, complectitur, alteri fubiectae funt formulae dimetiendi a fcriptoribus ex inftituto et dedita opera traditae, totique adeo libri eiusmodi formulis referti. Ad prius genus referenda eft quadrati, trianguli et rectanguli, et iftius quidem a Platone **), horum a Proclo ***) tradita dimenfio, pofteriore continentur formulae a Columella ****) ad aream varia-

*) Cf. quae de exterminandis e geometria computationibus Haufenius in praefatione elementorum mathefeos nec non in prooemio geometriae bene monuit.

**) In Menon. p. 82. d.

***) In Commentar. in primum Euclidis Elem. librum III. 8. IV. 11. et 18. p. 64. 105 et 109.

****) Libr. de Re Ruftica V. 2.

rum figurarum inueniendam expofitae, et magna ex parte ab incerto fcriptore rei agrimenforiae *), fed negligenter admodum repetitae, nec non Heronis iunioris Geodaefia **).

2. E formulis Columellae duae prae ceteris notari merentur, quarum altera trianguli aequilateri aream ex dato ipfius latere inueftigare, altera vero portionis circuli (arcus nomine a Columella infignitae) quae quidem femicirculo minor eft, aream ex nota eius bafi et altitudine ***) colligere docet. Sunt autem formulae ipfae generaliter conceptae hae:

Vt dimenfio trianguli aequilateri fiat, ducatur latus in fe ipfum, et producti fumatur pars tertia, itemque decima. Hae in unam fummam collectae aream quaefitam exhibebunt ****).

Ad dimenfionem portionis circuli, femicirculo minoris, conficiendam adiiciatur bafi altitudo, et fumma multiplicetur per altitudinem. Producti huius dimidio fi addatur pars decima quarta quadrati a

---

*) In Rei Agrariae auctoribus a Goefio edit. p. 311—315.

**) De hoc libro eiusque auctore omnino confulenda eft Pfleidereri Trigonometria plana (theodifce confcripta) §. 172—175.

***) *Bafin* fegmenti circularis cum Hugenio, qui in hoc Archimedis exemplum fecutus eft (def. Prop. XVIIIae libri de quadratura Parabolae praemiff.) appellare licet rectam, qua una cum arcu fegmentum comprehenditur, *altitudinem* vero maximum perpendiculum ab arcu in bafin demiffum.

****) Goefianus menfor p. 312. regulam ab hac diverfam, fed plane falfam inueniendae trigoni ifopleuri areae praefcribit. Iubet enim unum latus in dimidium alterius ducere. In dimenfione hexagoni aequilateri et aequianguli p. 315 tamen formam a Columella conftitutam fequitur.

dimidia basi facti, quae prodit summa aream desideratam manifestabit *).

Ex priore formula igitur area trianguli aequilateri dicto eius latere a, est $\frac{1}{3}aa + \frac{1}{10}aa = \frac{13}{30}aa$. Ex posteriore autem fit area segmenti circularis, semicirculo minoris, denotata basi eius per $2b$, altitudine vero per h, $= \frac{(2b+h)h}{2} + \frac{1}{14}bb = bh + \frac{1}{14}bb + \frac{1}{2}hh$.

Has expressiones veris tantum proximas esse, comparatione ipsarum ad veras leuiter modo facta, primo intuitu fit manifestum. Etenim seruatis, quae antea positae sunt, denominationibus area trianguli aequilateri est $= \frac{1}{4}aa\sqrt{3}$, portionis circuli autem

$$\left(\frac{bb+hh}{2}\right)^2 \text{Ang. tang} \frac{2bh}{bb-hh} - \frac{b(bb-hh)}{2h}.$$

3. Sed quoniam plenior intelligentia rationis et constitutionis formularum e Columella allatarum, et ab ipso fine dubio ex Graeco quodam auctore tractarum, ad meliorem rei arithmeticae et geometricae veterum, earumque consociationis, conducere videtur, formulis illis accuratius iam euoluendis atque amborum generum expressionibus, proxime videlicet et absolute veris, quibus vtriusque figurarum ante memo-

---

*) In hac formula reddenda geodaeta apud Goesium p. 315 mire lapsus est. Neque enim vidit, in exemplo numerico, quo Columella ad regulam suam commonstrandam vsus est, quaternarium, per quem summa baseos atque altitudinis collecta multiplicatur, altitudinem esse, sed pro numero nullius nominis et constante factore habuit. Hinc in exemplo, quod ipse adfert, eundem retinet, quamquam altitudinem quinque pedum ponit. Sed quodammodo excusandus videtur, propterea quod Columella rationem quaternarii istius haud dilucide expediuit, satis habens dixisse: *Hoc duco quater.*

ratarum area ob oculos ponitur, paullo diligentius inter se conferendis operae pretium me facere spero.

Aequatis igitur duabus formulis, aream trigoni isopleuri sistentibus, fit

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{3} = \tfrac{13}{30}$$

$$\text{hinc } \sqrt{3} = \tfrac{26}{15}$$

Omnino notatu dignum est, fracturam $\frac{26}{15}$ e numero earum esse, quae e fractione continua radicem quadratam ternarii exhibente deriuantur, et ad verum valorem ipsius $\sqrt{3}$ adeo appropinquant, vt ad eum fractura minoribus numeris expressa propius accedere non liceat. Est scilicet

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

vnde nascuntur fracturae ad $\sqrt{3}$ magis magisque appropinquantes $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{26}{15}$; $\frac{71}{41}$, $\frac{97}{56}$ etc. Ex quo perspicitur, nullam aliam fractionem, cuius quidem numerator pariter ac denominator centenarium non excedat, ad quartam ipsius $\sqrt{3}$ partem tam prope accedere, quam $\frac{13}{30}$, prorsus vt demirandum sit, Columellae formulam illi ipsi fractioni, tamquam fundamento, esse superstructam, et sponte sua oriatur quaestio, quanam via auctor formulae ad istum valorem ipsi $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ valde propinquum peruenerit.

4. Ad hanc quaestionem vt aliter quam coniecturali modo respondeatur, res ipsa pati non videtur. Quae igitur iam, vt quaestioni propositae satisfiat, prolaturus sum, maximam partem in coniectura posita sunt, quod eo praemonendum duxi, quo facilius et promtius, apud aequos harum rerum aestimatores, si quid errauerim, veniam impetrem.

Est autem ratio, qua fieri potuit, vt valor $\frac{13}{30}$ in locum ipsius $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ substitutus erueretur, omnino du-

plex. Valor iste enim aut ex aliis, qui iam noti erant, valoribus, ab iusto ipsius $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ valore haud notabiliter diuersis, deriuatus, aut sine horum ope per se inuentus est.

Primo indagandi modo in Archimedis libro de dimensione circuli et Hipparchi tabula, quantitatem rectarum circulo inscriptarum exhibente, adminicula parata erant, de quibus singulatim exponendum.

In Archimedis libro laudato deprehenditur ratio, quam altitudo trianguli aequilateri ad dimidiam basin habet, cuiusque denominator est ipsa radix quadrata ternarii, duabus rationibus, tanquam limitibus, circumscripta, altera earum veram rationem paullo excedente, altera ab eadem aliquantulum deficiente. Illa est 1351 : 780, haec 265 : 153. Ex posteriori ratio ipsi fere aequalis 26 : 15 hoc pacto deducitur. Quum circiter sit 265 : 153 = 5 : 3, erit propemodum (Elem. V. 19. VII. 11) 265 : 153 = 260 : 150 = (Elem. V. 15. VII. 17.) 26 : 15. Ex ratione autem 1351 : 780 exsistit ratio ad ipsam appropinquans 26 : 15 isto modo. Quoniam sine errore notabili est 1351 : 780 = 1352 : 780 = 26.52 : 15.52, erit vero proxime (Elem. l. postremum c.) 1351 : 780 = 26 : 15. Vtrinque igitur efficitur, vt altitudo trianguli aequilateri ad dimidiam basin, adeoque spatium altitudine et dimidia basi contentum ad quadratum a dimidia basi factum i. e. area trianguli aequilateri ad quartam partem quadrati lateris propemodum sit = 26 : 15. Quamobrem area perquam prope est = $\frac{26}{15}$ dictae quartae, siue $\frac{26}{60} = \frac{13}{30}$ quadrati a latere facti, quae est ipsa a Columella tradita formula.

Hipparchi tabula chordarum hodie quidem non extat, sed ipsi talem aliquam in promtu fuisse, ex eo colligere est, quod absque eiusmodi tabula ille vir computationes, quas in comperto est confecisse, neuti-

quam inire potuisset. Ab ipso autem subtensarum canonem, qualem primus, quantum constat, condidit, in vulgus editum esse, ex Theonis testimonio conijci potest, qui eum duodecim libris inuestigationem atque vsum (πραγματείαν) rectarum in circulo tradidisse refert *). Quamuis enim de canone diserte non meminit, attamen Hipparchus illum subiunxisse putandus est, quoniam praecepta ab ipso tradita sine canone infructuosiora fuissent. Sumto igitur hoc pro certo, Hipparchi tabulam subtensarum olim in medio atque in manibus fuisse, ex ea ratio altitudinis trianguli aequilateri ad basin dimidiam numeris expressa depromi potuit. Est enim eadem ac ratio, quam subtensa 120 graduum ad subtensam 60 graduum siue radium circuli habet **). Haec autem per canonem subtensarum Ptolemaei, quem quidem Hipparchi rationem in adornando atque disponendo canone suo tenuisse verisimillimum est, reperitur esse $= 103 + \frac{55}{60} + \frac{23}{3600} : 60$ i. e. proxime $104 : 60 = 26 : 15$, vnde eadem, quae antea, simili plane modo inferuntur.

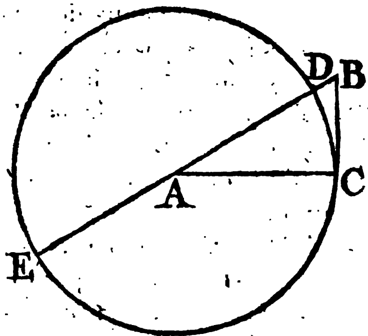
5. Differendum nunc est de modo fractionem $\frac{26}{15}$, vero radicis quadratae ternarii valori proximantem, sine subsidiis, de quibus praec. articul. expositum est, inueniendi. Haec autem disputatio eo recidit, vt explicetur, qua ratione Archimedes limites ab ipso radici quadratae ternarii constitutos, et Hipparchus quantitatem subtensae 120 graduum, inuestigauerit. De priori etsi difficile sit solidum aliquid

---

*) Εἰς τὸ τοῦ Πτολεμαίου βιβλίον α΄. ὑπόμνημα p. 39.

**) In schemate propos. 12. Lib. XIII. Elem. edit. Barrovian. vel Baermannian. scilicet est, ob angulos ABE, AFB rectos, et angulum BAE communem, triangulum ABE triangulo ABF aequiangulum: quare (Elem. VI. 4) AF : FB = AB : AD (= BE).

neque omnino Archimede indignum in medium adferre, sustinebimus tamen methodum proponere, qua Archimedes in eruendis limitibus istis forsitan vsus est. Quae quam bene cum aliis ab illo viro adhibitis inveniendi methodis congruat, doctis iudicandum relinquimus.



Esto igitur triangulum rectangulum ABC, angulum ACB habens rectum, BAC autem trienti recti aequalem, erit BC basis dimidia trianguli aequilateri, cuius latus est AB; AC vero altitudo eiusdem, atque $AB = 2\,BC$, hinc $AC^q = AB^q - BC^q = \frac{3}{4} AB^q$, et $AC : BC = \sqrt{3} : 1$. Descripto iam e centro A, interuallo AC, circulo rectam AB in D transeunte, eamdemque productam in E secante, est $AC = AD = AB - BD = 2\,BC - BD$, et quia BC circulum contingit, BE autem secat, (Elem. III. 36.) $BC^q = BD \times BE$, hinc (Elem. VI. 17.) $BD : BC = BC : BE$. Iam quum sit $BE = 2\,AD + BD = 2\,AC + BD$; trianguli autem ABC latus AC, vtpote maiori angulo ABC ($= \frac{2}{3}$ recti) subtensum, $> BC$: erit $BE > 2\,BC$, siue $BC < \frac{1}{2}\,BE$, proinde et $BD < \frac{1}{2}\,BC$. Rursus est $BE = AB + AE = 2\,BC + 2\,BC - BD = 4\,BC - BD$, ergo $4\,BC > BE$, et $BC > \frac{1}{4}\,BE$, quare etiam $BD > \frac{1}{4}\,BC$. Quodsi nunc compendii causa AC dicatur z, BC p, et BD u, habetur $z = 2p - u$, itaque (Elem. V. 7.) $z : p = \sqrt{3} : 1 = 2p - u : p$, praeterea $u : p = p : 4p - u$, ergo *inuerse* (Elem. V. 4. cor.) $p : u = 4p - u : p$, u existente $> \frac{1}{4}\,p$, sed $< \frac{1}{2}\,p$. Quoniam igitur $p : u = 4p - u : p$, erit *alterne* (Elem.

V. 16) $p : 4p - u = u : p$, hinc (Elem. V. 15. 11) $2p : 2(4p - u)$ i. e. $2p : 8p - 2u = u : p$, ergo (Elem. V. 19. 11) $2p - u : 7p - 2u = u : p = p : 4p - u$, *alterne* igitur $2p - u : p = 7p - 2u : 4p - u$. Quapropter est quoque $z : p = 7p - 2u : 4p - u$. Et quia $p : 4p - u = u : p$, erit (Elem. V. 15. 11.) $7p : 7(4p - u) = 2u : 2p$ siue $7p : 28p - 7u = 2u : 2p$, proinde (Elem. V. 19. 11) $7p - 2u : 26p - 7u = 2u : 2p = u : p$. Similiter est $4p - u : 15p - 4u = u : p$; quare (Elem. V. 11) $7p - 2u : 26p - 7u = 4p - u : 15p - 4u$, ergo *alterne* $7p - 2u : 4p - u = 26p - 7u : 15p - 4u$. Quamborem et $z : p = 26p - 7u : 15p - 4u$. Sed quoniam $p : 4p - u = u : p$, est (Elem. V. 15. 11) $26p : 104p - 26u = 7u : 7p$, ergo (Elem. V. 19. 11) $26p - 7u : 97p - 26u = u : p$. Pari modo est $15p - 4u : 56p - 15u = u : p$, quocirca $26p - 7u : 97p - 26u = 15p - 4u : 56p - 15u$, *alterne* igitur $26p - 7u : 15p - 4u = 97p - 26u : 56p - 15u$. Quare etiam $z : p = 97p - 26u : 56p - 15u$. Ratiocinatione eodem tenore perpetuata, efficitur, vt sit pariter $z : p = 362p - 97u : 209p - 56u = 1351p - 362u : 780p - 209u$ etc.

Iam quum sit $z : p = 2p - u : p$, ob $2p$ autem $> 2p - u$, (Elem. V. 8) $2p : p > 2p - u : p$, erit (Elem. V. 13. cor. Simsoni) $2p : p > z : p$, siue $z : p < 2p, : p$ i. e., $< 2 : 1$. Et quia (Elem. V. 15) $2u : 2p = u : p$, erit *alterne* $2u : u = 2p : p$, quare (Elem. V. 13) $2u : u > z : p$. Sed est $z : p = 7p - 2u : 4p - u$, ergo (Elem. V. 13 cor. Simsoni) $2u : u > 7p - 2u : 4p - u$, proinde *) $7p : 4p > 7p - 2u : 4p - u$, ergo (Elem.

*) Vid. Dissertat., quam Celeberr. Hauber sub titulo: *Propositionum de rationibus inter se diuersis*

l. c.) $7p : 4p > z : p$ siue $z : p < 7p : 4p$, h. e., $< 7 : 4$. Eadem ratione ostenditur esse

$$z : p < 26 : 15$$
$$< 97 : 56$$
$$< 362 : 209$$
$$< 1351 : 780 \text{ etc.}$$

Porro quoniam $p > u$, sit $p - u = v$, erit $v > \frac{1}{2}p$, at $< \frac{3}{4}p$. Et quia $z : p = 2p - u : p = p + p - u : p$, est quoque $z : p = p + v : p$. Deinde quum sit $z : p = 7p - 2u : 4p - u = 5p + 2p - 2u : 3p + p - u$, $2p - 2u$ autem (Elem. V. 6) $= 2(p - u) = 2v$, erit etiam $z : p = 5p + 2v : 3p + v$. Adhibitis sic deinceps rationibus, quibus ratio $z : p$ antea aequalis demonstrata est, simili modo comprobatur esse itidem $z : p = 19p + 7v : 11p + 4v = 71p + 26v : 41p + 15v = 265p + 97v : 153p + 56v = 989p + 362v : 571p + 209v$ etc.

Quia igitur $z : p = p + v : p$, sed ob $p + v > p$, (Elem. V. 8) $p + v : p > p : p$, erit (Elem. V. 13) $z : p > p : p$, i. e. $> 1 : 1$. Dein quum sit (Elem. V. 15) $2v : 2p = v : p$, *alterne* igitur $2v : v = 2p : p$, posterior ratio autem $> z : p$, est (Elem. V. 13) $2v : v > z : p$, hinc (Elem. l. l.) $2v : v > 5p + 2v : 3p + v$, quare *) $5p : 3p < 5p + 2v : 3p + v$ siue $5p + 2v : 3p + v > 5p : 3p$, ergo etiam (Elem. l. c.) $z : p > 5p : 3p$, i. e. $> 5 : 3$. Haud absimili modo demonstratur esse

$$z : p > 19 : 11$$
$$> 71 : 41$$
$$> 265 : 153$$
$$> 989 : 571$$

---

demonstrationes ex solis libri V. Elem. definitionibus ac propositionibus deductae, Tubingae 1793 publicauit, §. 45.

*) Dissert. laud. §. 48.

Comparent hic duae rationum ſeries, altera rationum ratione ipſius z ad p maiorum, altera rationum hac ipſa ratione minorum. In priore reperitur non modo ratio 26 : 15, qua praeceptum Columellae de area trianguli aequilateri ſupputanda innititur, verum et illa 1351 : 780, ex qua Archimedes rationem ratione, quam circuli diameter ad latus polygoni 96 laterum circulo inſcripti habet, maiorem deduxit. In poſteriore ſerie autem extat ratio 265 : 153, qua idem ille vſus eſt ad exhibendam rationem minorem ea, quae diametro cum latere polygoni 96 laterum circulum circumſcribentis intercedit. Ceterum ſi cui forte methodus expoſita artificioſior quam pro Archimedis ſcientia atque eruditione videatur *), is, vt ſpeciminis tantum cauſa demonſtrationes, quibus Archimedes propoſ. 9. libr. II. de Aequiponderantibus, propoſ. 3 de Conoidibus et Sphaeroidibus, et propoſ. 10. 11que de Helicibus ſeu Spiralibus muniuit, perluſtret atque expendat, quaeſo. Eo enim fiet, vt opinionem ſuam deponat, nihilque tam arduum et ſubtile eſſe intelligat, cui diuinum Archimedis ingenium par non fuerit.

6. Explicatis iis, quae ſuper ratione, qua Archimedes et auctor regulae, aream trianguli aequilateri ex noto latere inueniendi, fractiones vero valori radicis quadratae ternarii appropinquantes indagauerint, cogitantibus nobis probabilia ſunt viſa, agitan-

---

*) Exemplum rationis duarum quantitatnm incommenſurabilium numeris proxime expreſſae extat iam in Ariſtarchi Samii, qui aetate prior eſt Archimede, libro περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων Ἡλίου καὶ Σελήνης, prop. VII. p. 582. Vol. III. Operum Walliſii. Ponitur enim $\sqrt{2} : 1 > 7 : 5$, fractio $\frac{7}{5}$ autem in iis eſt, quae e fractione continua radicem quadratam binarii ſiſtente euoluuntur.

dum nunc esset de modo, quo Hipparchus subtensam 120 graduum numeris expressam inuenerit. Sed quoniam haec inuestigatio sola extractione radicis quadratae ex $3.60^2 = 10800$ absoluitur, lectorem ad Theonis εἰς τὸ τοῦ Πτολεμαίου βιβλίον α ὑπόμνημα remittere possumus, ubi pag. 44. docetur, quomodo numeri non quadrati, qualis est 10800, radicem proxime veram reperire liceat, quam quidem Theonis rationem etiam Clariss. Ideler in sua *de trigonometria veterum* dissertatione *) tradidit. Nihil ergo amplius huic circa priorem Columellae formulam disquisitioni addimus, quam determinationem erroris, qui in vsu formulae eius committitur. Apparet autem ex artic. praec., fractionem $\frac{26}{15}$ paullo maiorem esse radice quadrata ternarii, quare et area trianguli aequilateri ad Columellae regulam computata veram paullulum excedet, excessu existente $= \frac{13}{30} aa - \frac{1}{4} aa\sqrt{3}$. Quo autem quantitas erroris melius innotescat, eam ad mensuram aliquam communem vulgoque notam reuocemus. Inuestigemus igitur, quot pedes latus trianguli habere debeat, vt in area uno pede quadrato aberretur. Quo constituto cogitur, vt sit

$$\frac{13}{30} aa - \frac{1}{4} aa\sqrt{3} = 1$$

$$\text{hinc } aa = \frac{60}{26 - 15\sqrt{3}} = 60\,(26 + 15\sqrt{3})$$

$$\text{proinde } a = \sqrt{60(26 + 15\sqrt{3})} = 9\sqrt{10} + 5\sqrt{30}$$

$$= 55{,}8466268 = 55\tfrac{11}{13} \text{ proxime.}$$

Si ergo latus trianguli aequilateri contineat ped. $55\frac{11}{13}$, area ex praescripto Columellae inuenta veram vno pede quadrato excedit. Hinc erroris in aliis casibus facilis est taxatio. Accrescit enim in ratione duplicata laterum, vt, si numerus $55\frac{11}{13}$ pedum in latere

---

*) Monatl. Corresp. B. XXVI. S. 14.

insit, e. c., bis, error impleat summam 4 pedum quadratorum, et sic de ceteris. Errore autem unum pedem quadratum aequante, area ex Columellae praecepto computata est $= \frac{4}{15} . 60 (26 + 15\sqrt{3}) = 26(26+15\sqrt{3}) = 676 + 390\sqrt{3} = 1351,4998$ siue proxime $= 1351\frac{1}{2}$ ped. quadrat.; proinde error est duarum tantarum, quantas habet area, quam Columellae formula praebet, bis millesimas septingentesimas tertias, quo cognito haud difficile est, formulae isti correctionem, si qua opus sit, adhibere.

7) Progredimur iam ad formam, quam Columella auctore et doctore sequi oportet, si area portionis circuli semicirculo haud maioris computanda veniat. Aequatis et hic formula exacta atque ea, quam e Columellae praecepto deduximus, fit

$$\left(\frac{bb+hh}{2h}\right)^2 \text{Ang. tang} \frac{2bh}{bb-hh} - \frac{(bb-hh)b}{2h}$$
$$= bh + \tfrac{1}{2}hh + \tfrac{1}{14}bb$$

siue, quia Ang. tang $\frac{2bh}{bb-hh} = 2$ Ang. tang $\frac{h}{b}$,

$$\left(\frac{bb+hh}{h}\right)^2 \text{Ang. tang} \frac{h}{b} - \frac{(bb-hh)b}{h}$$
$$= 2bh + hh + \tfrac{1}{7}bb.$$

Quum omnium segmentorum, semicirculum non excedentium et super eadem recta tamquam basi constitutorum, vltimum sit semicirculus ipse super illa recta descriptus, primum autem duae rectae sibi inuicem superincidentes, hinc duo constituuntur casus extremi, quibus respondent anguli ad centrum 180 et 0 graduum, et quos inter casus ille, ubi angulus ad centrum est 90 graduum, tanquam medius, interponitur. Age vero videamus, quid ex aequatione nostra in his casibus singularibus selectisque efficiatur. Primum qui-

dem manifeſtum eſt, euaneſcente ſegmenti altitudine fieri $h = b : \infty$, quare habemus

$$\frac{b^3}{h} - \frac{b^3}{h} = o = \tfrac{1}{7} bb.$$

quod quum ſit abſurdum, aequatio hoc caſu, niſi ſit et $b = o$, neutiquam ſubſiſtit. Altero caſu, quo angulus ad centrum eſt rectus, ſegmentumque quadrante circumductae et ſubtenſa ipſius continetur, eſt $\frac{h}{b} = \sqrt{2} - 1 = \text{tang } \tfrac{1}{8} \pi$, denotante π dimidiam peripheriam circuli, cuius radius eſt $= 1$, proinde $h = (\sqrt{2} - 1) b$, et $\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}$, quibus valoribus in aequationem noſtram introductis fit

$$\pi bb - 2 bb = 1\tfrac{1}{7} bb.$$

hinc $\pi = 3\tfrac{1}{7}$. Abeunte tandem ſegmento in ſemicirculum, qui caſus eſt tertius, eſt $b = h$, et aequatio noſtra hoc caſu euadit

$$\pi bb = 3\tfrac{1}{7} bb$$

vnde fit itidem $\pi = 3\tfrac{1}{7}$.

Numerus pro ipſo π hic erutus eſt vnus ex limitibus ab Archimede denominatori rationis, quam ambitus circuli ad diametrum habet, aſſignatis, idemque fere ſolus veteribus expeditioris et commodioris vſus gratia in computationibus ad circulum pertinentibus vſurpatus *), quamquam Eutocio refe-

---

*) Vid. Plin. Hiſt. Nat. II, 23 (21 Harduin.) Macrob. in ſomn. Scip. I. 20. Formulae etiam, quas Columella ad menſurandam circuli et ſemicirculi aream habet, eidem illi numero accommodatae ſunt. Hoc loco non alienum erit monuiſſe, pro numero CLX, quem nouiſſima Clariſſ. Schneideri editio ſcriptorum rei ruſticae in Columellae problemate de ſemicirculo exhibet, ſubſtituendum eſſe CXL, (rectius CXXXX) qui in

rente *) Apollonius Pergaeus Philoque Gadarensis rationem istam accuratius, verum numeris maioribus, definierant. Assumto ergo hoc ipsius π valore duobus casibus posterioribus (nam eius, vbi b et $h = 0$, rationem habere nil attinet,) aequatio supra allata stat, ex quo sequitur, vt in his ipsis casibus Columellae formula a veritate non recedat.

8. Duos casus, quos modo indicauimus, solos esse, in quibus Columellae formula veram segmentorum aream praebeat, non nisi ratione eius penitus perspecta planeque cognita apparere potest. Quam quidem intelligentiam vt consequamur, eius originem analysi investigemus perinde ac si formula de integro esset condenda.

Inscripto igitur in portionem circuli, semicirculo haud maiorem, triangulo maximo, portio in tres partes diuiditur, quarum vna illud ipsum triangulum maximum, binarum reliquarum autem vtrauis est portio circuli super latere trianguli maximi constituta, et dimidio arcu portionis ab initio expositae comprehensa. Seruatis iam denominationibus artic. 2. area trianguli inscripti, quod cum portione eamdem basin atque altitudinem habet, est bh. Segmentorum autem reliquorum duorum una sumtorum area fingatur ita a quantis b et h pendere, vt hac, ad quam per ipsam Columellae regulam deducimur, forma $mbb + nhh$, litteris m et n duos factores constantes designantibus,

---

Gesneriana prima (anne et in altera, nescio) legitur, uniceque verus est. Si enim radius, quem Columella curuaturae latitudinem dixit, est ped. LXX, diametros a Columella nomine baseos semicirculi insignita CXL ped. contineat, necesse est. Mendum vnde ortum traxerit, facile est suspicatu.

*) In Commentar. ad Archimedis de dimensione circuli librum; in Wallisii Opp. Tom. III. p. 157.

exprimatur. Area ergo portionis totius est $= bh + mbb + nhh$, in qua forma iam factores m et n determinari oportet. Quod quo expeditius fiat, statuamus radium circuli $= 1$, angulum ad centrum autem, qui dimidio arcui portionis insistit $= \varphi$, eritque $b = \sin\varphi\, h = 1 - \cos\varphi$, hinc $bh + mbb + nhh = \sin\varphi, - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}m\ (1 - \cos 2\varphi) + \frac{1}{2}n\ (3 - 4\cos\varphi + \cos 2\varphi)$. Sed area ex praeceptis geometriae inuenitur esse $= \varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi$. Quodsi ergo illa hanc aequiparare debet, necesse est, vt sit

$$\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}m\ (1 - \cos 2\varphi) + \frac{1}{2}n\,(3 - 4\cos\varphi + \cos 2\varphi) = \varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

proinde

$$m(1 - \cos 2\varphi) + n(3 - 4\cos\varphi + \cos 2\varphi) = 2\varphi - 2\sin\varphi\ (\odot)$$

Quum hic duo tantum coefficientes, m et n, sint determinandi, plures duobus ipsius φ valoribus, ad hanc determinationem absoluendam, adhibere non licet. Quia igitur aequatio charactere solis ($\odot$) signata iam ad valorem $\varphi = 0$, quo casu est b et $h = 0$, segmentumque euanescit, sponte quadrat, deligantur proposito adsequendo valores $\varphi = 45° = \frac{1}{4}\pi$, et $\varphi = 90° = \frac{1}{2}\pi$ angulis ad centrum summam 90 et 180 gradum conficientibus. His constitutis habetur

$$\text{I. } m + n(3 - 2\sqrt{2}) = \tfrac{1}{2}\pi - \sqrt{2}$$
$$\text{II. } 2m + 2n = \pi - 2.$$

Aequatione I in 2 ducta et, quae prodit, ab aequatione II ablata, relinquitur

$$4n(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$
$$\text{hinc } n = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$$

Quo valore ipsius n in aequatione II. substituto, sit

$$2m + 1 = \pi - 2$$
$$\text{proinde } m = \frac{\pi - 3}{2}.$$

Determinatis sic ipsorum m et n valoribus formula ad exhibendam aream segmenti circularis paullo ante assumta $bh + mbb + nhh$ valorum istorum introductione

abit in hanc $bh + \frac{1}{2}hh + \frac{\pi - 3}{2}bb$, in qua si statuamus $\pi = \frac{22}{7}$, in eam ipsam formulam, quae Columellae praescripto conuenit, incidimus. Quare dubium esse non potest, quin eius veram originem hoc pacto explorauerimus.

Quum itaque formula $bh + mbb + nhh$ duobus tantum casibus exactae aequipollens facta sit, facile perspicitur, formulam, quae sic elicita est, $bh + \frac{1}{2}hh + \frac{\pi - 3}{2}bb$, ita fore comparatam, vt duobus istis casibus solis iustam segmentorum mensuram reddat, in ceteris omnibus autem de veritate deflectat. Quod, quo extra omnem dubitationis aleam ponatur, peculiari insuper demonstratione corroborari expedit.

9. Substituantur igitur in aequatione (⊙) artic. praeced. pro ipsis m et n valores eorum modo reperti, quo facto erit

$$2\varphi - 2\sin\varphi + 2\cos\varphi - 2\cos 2\varphi = \frac{\pi}{2}(1 - \cos 2\varphi). \;(☽)$$

vnde fit

$$\pi = \frac{4(\varphi - \sin\varphi + \cos\varphi - \cos 2\varphi)}{1 - \cos 2\varphi}$$

Ex hac formula, si ipsi φ valorem quemcumque tribuere licet, cogitur, vt π sit quantitas variabilis, qualis tamen non est, sed vel maxime constans. Quo ergo haec incongruentia tollatur, in aequatione (☽) valor ipsius π indeterminatus permaneat, aequatioque subsistat, quicquid demum sit π, oportet. Quare quum tantummodo membrum 2φ ex sua vi atque natura ad ipsum $\frac{\pi}{2}$ referri, cumque eo comparari possit, necesse est, hasce duas aequationes,

$$2\varphi = \frac{\pi}{2}(1 - \cos 2\varphi) \;(I)$$

$$2\cos\varphi - 2\sin\varphi - 2\cos 2\varphi = 0, \;(II)$$

quarum additione aequatio (☾) conflatur, pro se quamque subsistere. Ex aequatione (II) autem fit

$$\cos\varphi - \sin\varphi = \cos 2\varphi = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2$$

cuius aequationis quum vtraque pars per $\cos\varphi - \sin\varphi$ diuidi possit, habemus primum

$$\cos\varphi - \sin\varphi = 0$$

$$\text{siue } \cos\varphi = \sin\varphi$$

i. e., quoniam valores φ ipso π maiores, aeque ac negatiui, excluduntur

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = \sin\varphi$$

$$\text{hinc fit } \varphi = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Deinde vero diuisione aequationis $\cos\varphi - \sin\varphi = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2$ re ipsa instituta peractaque est

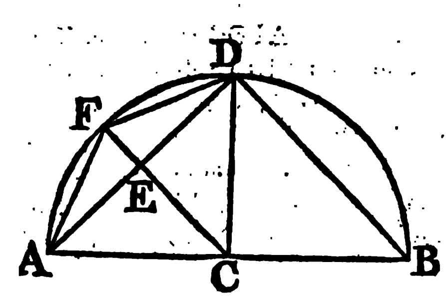
$$1 = \cos\varphi + \sin\varphi$$

vnde non modo

$\dfrac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}$, sed et $\dfrac{\cos\varphi}{1 - \sin\varphi} = 1 = \tang\tfrac{1}{4}\pi$ prodit.

Quocirca, quum sit $\dfrac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = \tang\tfrac{1}{2}\varphi$, $\dfrac{\cos\varphi}{1 - \sin\varphi} = \tang(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi)$, erit tam $\tfrac{1}{2}\varphi$, quam $\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{4}\pi$, ergo $\varphi = \tfrac{1}{2}\pi$ et 0. Valoribus $\varphi = 0$, $\varphi = \tfrac{1}{4}\pi$, et $\varphi = \tfrac{1}{2}\pi$ iam in aequationem I. introductis ex ea existit $0 = 0$; $\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{2}\pi$; $\pi = \pi$. Quare ambae aequationes I et II ipso φ valores 0, $\tfrac{1}{4}\pi$, $\tfrac{1}{2}\pi$ obtinente valent, hique soli sunt, quibus id efficitur.

10. Inuestigata origine formulae a Columella ad mensurationem segmenti circularis praescriptae calculi litteralis subsidio, iam conabimur rationem adumbrare, quam illius formulae auctor geometriae solius auxilio adiutus in ea inuenienda fortasse secutus est.



Sit igitur ADB semicirculus, cuius centrum C, diameter AB, erectoque in C ad AB perpendiculo CD, ducantur AD et DB, quo facto it (Elem. I. 4) AD = DB, et (Elem. I. 47) $AD^q = DB^q = 2\ AC^q$. Demisso dein ex C ad AB perpendiculo CE, productoque eo vsque ad peripheriam F, iungantur AF, FD. Quia igitur recta CF per centrum C transiens rectam AD ad angulos rectos secat, est (Elem. III. 3) AE = ED, hinc (Elem. I. 8.) CE = ECD = $\frac{1}{2}$ recti = DAC, proinde (Elem. I. 6.) E = EC = ED = $\frac{1}{2}$ AD, ergo AE^q siue DE^q = $\frac{1}{4}\ AD^q = \frac{1}{2}\ AC^q$. Praeterea est (Elem. I. 4) F = FD, et Δ AFC = Δ CFD. Sumto iam, diametrum se habere ad peripheriam, vt 7 ad 22, erit i Prop. III. libr. Archimedis de dimens. circ.) circus, cuius dimidium ADB, = $\frac{11}{14}\ AB^q = \frac{22}{7}\ AC^q$, nc semicirculus ADB = $\frac{11}{7}\ AC^q = AC^q + \frac{1}{2} AC^q$ $\frac{1}{14} AC^q$ *) = Δ ADB + $\frac{1}{2}\ CD^q + \frac{1}{14}\ AC^q$. Porro ium quadrans ACD sit = $\frac{1}{2}\frac{1}{4}\ AC^q$, Δ ADC autem = 2 Δ FDC — Δ AFD = CF × DE — Δ AFD = F × CE — Δ AFD, est segmentum AFD = Δ AFD +

*) Veteres, nominatim Graeci, vti videre est apud rchimedem, Ptolemaeum, Geminum, Eutocium et heonem, ob incommodam praesertim, qua vtebantur, ımerorum notandorum rationem in designandis minuis hunc morem tenebant, vt, quotiescumque fieri post, fractionem, numeratorem ab unitate diuersum habentem, semper in duas vel plures fractiones, quarum ımeratores essent = 1, dirimerent, easque sic distriıtam efferrent. Haec discerptio hic in vsum tracta est.

$\frac{11}{16}AC^q - CF \times CE$. Sed in ΔFDC eſt (Elem. II. 13) $DF^q + 2CF \times CE$, ſiue $DE^q \pm EF^q + 2CF \times CE = CD^q + CF^q$, i. e., $= 2AC^q$, ergo $2CF \times CE = 2AC^q - DE^q - EF^q = \frac{5}{4}AC^q - EF^q$, proinde $CF \times CE = \frac{5}{8}AC^q - \frac{1}{2}EF^q$. Quamobrem erit ſegmentum $AFD = \Delta AFD + \frac{1}{2}EF^q + \frac{11}{16}AC^q - \frac{5}{8}AC^q = \Delta AFD + \frac{1}{2}EF^q + \frac{1}{16}AC^q = \Delta AFD + \frac{1}{2}EF^q + \frac{1}{12}AE^q$.

Quum itaque ſemicirculus ADB ex triangulo ſibi inſcripto maximo ADB, et quadratis ab eius altitudine CD et dimidia baſi AC factis, eodem plane modo componatur, ac ſegmentum AFD quadranti competens, ex triangulo maximo ſibi inſcripto AFD, et quadratis altitudinis EF et dimidiae baſis AE, numeris, per quos ſpatia a lineis cognominibus deſcripta multiplicanda veniunt, in vtroque caſu iisdem exiſtentibus, patet, quomodo, ſemicirculo pro ſegmento habito, formula inde deduci atque condi potuerit ad aream ſegmenti circularis cuiuslibet inueniendam, quae haud ſcio an ab auctore pro vniuerſali putata fuerit, quum reuera duobus dumtaxat ſegmentis accommodata ſit.

11. Reſtat, vt de errore videamus, cui formula Columellae obnoxia eſt. Cuius quidem ratio ac tenor expeditius iuxta planiusque explicari non poſſe nobis viſa ſunt, quam tabula hic ſubiecta, quae quantitatem erroris iſtius pro valoribus denominatoris rationis, quam altitudo ſegmenti ad dimidiam baſin habet, intra nihilum et vnitatem ſubſiſtentibus, et parte decima unitatis a ſe inuicem differentibus, ob oculos ponit

$\frac{h}{b}$	$\frac{S}{bb}$	$\frac{\Sigma}{bb}$	$\frac{\Sigma - S}{bb}$	$\frac{\Sigma - S}{\Sigma}$
0, 0	0, 000000	0, 070796	0, 070796	1, 000000
0, 1	0, 133600	0, 175796	0, 042196	0, 240032
0, 2	0, 268788	0, 290796	0, 022008	0, 075683
0, 3	0, 407110	0, 415796	0, 008686	0, 020891
0, 4	0, 550029	0, 550796	0, 000767	0, 001392
			$\frac{S - \Sigma}{bb}$	$\frac{S - \Sigma}{\Sigma}$
0, 5	0, 698899	0, 695796	0, 003103	0, 004459
0, 6	0, 854944	0, 850796	0, 004148	0, 004875
0, 7	1, 019258	1, 015796	0, 003462	0, 003408
0, 8	1, 192799	1, 190796	0, 002003	0, 001682
0, 9	1, 376405	1, 375796	0, 000608	0, 000442
1, 0	1, 570796	1, 570796	0, 000000	0, 000000.

Vt de vi ac poteſtate numerorum in hac tabula obuiorum penitus conſtet, notari conuenit, ſignorum *S* et Σ, quae in ea praeter iam uſurpata *b* et *h* occurrunt, prius aream veram, poſterius autem aream ex Columellae formula computatam, cum eo tamen, vt pro ipſius π valore numerus 3,1415926 loco illius $\frac{22}{7}$ adhibeatur, nobis deſignare.

Numerus igitur, qui ad ſiniſtram in ingreſſu laterali tabulae inuenitur, eſt denominator rationis, quam altitudo ſegmenti ad dimidiam baſin ipſius habet. Qui huic ſunt deinceps in eodem verſu adiuncti numeri, eorum primus, quota pars quadrati a dimidia baſi facti ſit area vera, indicat, ſecundus hoc ipſum de area ad Columellae formulam computata manifeſtat, tertius differentiae, quae inter vtramque aream intercedit, ad quadratum dimidiae baſeos rationem oſtendit, quartus denique errorem formulae Columellianae cum area ex ipſa ſupputata comparat, quotumque ex diuiſione illius per hanc ortum exhibet.

Sed quo dispositio tabulae planissime intelligatur, haud inconsultum fuerit, vsum eius exemplo illustrare, quod ex problemate ab ipso Columella prolato capiamus. Quaeritur autem in eo area portionis circuli, cuius basis 16, altitudo vero 4 pedes habet. Est igitur $b = 8$, $h = 4$, proinde $\frac{h}{b} = \frac{4}{8} = 0,5$; hinc $\frac{S}{bb} = 0,698899$; $\frac{\Sigma}{bb} = 0,695796$. Quare erit area vera $S = \frac{S}{bb} \cdot bb = 64 \cdot 0,698899 = 44,7295$ ped. quadr., area autem ad Columellae formulam ratiocinata $\Sigma = 64 \cdot 0,695796 = 44,5309$ ped. quadr., pro quo numero Columella ob minutiarum neglectum 44 tantum elicit. Excessus ergo areae verae super aream, quam Columellae forma praebet, est $=$ 0,1986 ped. quadr. $= 64 \cdot 0,003103 = \frac{4459}{1000000} \cdot 44,5309$ siue circiter $\frac{1}{200}$ areae proxime dictae.

Monstrat insuper tabula, Columellae formulam ipso $\frac{h}{b}$ valores inde a 0, 0 ad 0, 3 vsque tenente aream praebere plus a vera recedentem, quam vt errorem inde oriundum tuto negligere liceat. Consultius ergo videtur vsum illius certis circumscribere limitibus, eumque ad valores ipsius $\frac{h}{b}$, qui intra 0, 4 et unitatem consistunt, adstringere. Prior horum valorum paullulum modo distat ab uno eorum, pro quibus Columellae formulam exactae aequipollere supra vidimus, quique sunt $-1 + \sqrt{2}$ siue proxime $\frac{5}{12}$ et 1, posterior cum altero eorum prorsus conuenit. Limites igitur, extra quos usum formulae extendere non expedit, sic quoque constitui possunt, vt vnus eorum sit segmentum anguli, qui sesquialter est recti, capax, alter vero segmentum angulum capiens rectum siue

emicirculus. Intra hos limites, vti videre eſt in praecedenti tabula, area ex praeſcripto Columellae ſupputata ſemper iuſto minor eſt, maximaque differentia qua a vera aberrat, obtinet ipſo $\frac{h}{b}$ valorem 0,6 circiter habente. Ad eam accuratius definiendam ſumta inter veram aream illamque, quam Columellae regula affert, differentia habetur

$$2(S-\Sigma)=\left(\frac{bb+hh}{h}\right)^2 \text{Ang. tang}\,\frac{h}{b}-\frac{b^3}{h}-bh-hh-(\pi-3)bb.$$

Facto iam $\frac{h}{b}=q$, forma praecedens transmutatur in hanc

$$\frac{2(S-\Sigma)}{bb}=\left(\frac{1+qq}{q}\right)^2 \text{Ang. tang}\,q-\frac{1}{q}-q-qq-(\pi-3)$$

unde fit poſito $\frac{2(S-\Sigma)}{bb}=V$

$$\frac{dV}{dq}=\frac{2}{qq}-2q-\frac{2(1+qq)(1-qq)}{q^3}\text{Ang. tang}\,q$$

Hinc adaequato ſecundum maximorum et minimorum methodum exponente differentiali $\frac{dV}{dq}$ cifrae aequatio determinando ipſius V adeoque $S-\Sigma$ valori maximo eſt

$$(1+qq)(1-qq)\text{Ang. tang}\,q=q(1-q^3)$$

cui quidem valoribus 0 et 1 ipſius q vltro ſatisfit. Verum quum pro illo differentiam $\Sigma-S$ fieri maximam, pro hoc autem ad nihilum redigi ex antecedentibus conſtet, poſthabitis iſtis valoribus alius valor ipſius q, idemque hic requiſitus eruendus eſt ex aequatione

$$\text{Ang. tang}\,q=\frac{q(1+q+qq)}{(1+q)(1+qq)}$$

$\frac{\Sigma}{bb} = 0,7868165$; proinde valor maximus ipſius $\frac{S - \Sigma}{\Sigma} = \frac{39920}{7868165} = 0,0050736$, minor ergo quam $\frac{1}{197}$ ($= 0,0050761$).

Explorato valore maximo ipſius $\frac{S - \Sigma}{\Sigma}$ habetur quoque maximus valor ipſius $\frac{S - \Sigma}{S}$. Quia enim $\frac{S - \Sigma}{\Sigma} = \frac{S}{\Sigma} - 1$, erit in caſu quoti $\frac{S - \Sigma}{\Sigma}$ maximi etiam quotus $\frac{S}{\Sigma}$ maximus, proinde $\frac{\Sigma}{S}$ minimus, ergo $\frac{S - \Sigma}{S} = 1 - \frac{\Sigma}{S}$ maximus. Erit igitur maximus ipſius $\frac{S - \Sigma}{S}$ valor $= \frac{39920}{7908085} = 0,0050480$, minor itaque quam $\frac{1}{198}$ ($= 0,0050505$).

Quibus ex omnibus ſequitur, errorem formulae a Columella ad inueniendam aream portionis circuli, ſemicirculo minoris, praeſcriptae, ſi vſus eius limitibus ipſius $\frac{h}{b}$ ſupra conſtitutis, $\frac{5}{12}$ et 1, terminetur, numquam $\frac{1}{197}$ areae ex ipſa computatae ſiue $\frac{1}{198}$ areae verae excedere, planeque etiam a nobis adhiberi poſſe iſtam formulam, vbi partem centeſimam nonageſimam ſeptimam areae ſecundum ipſam ſupputatae nihili pendere licet.

12. Quae hactenus de formulis in dimenſione trianguli aequilateri et ſegmenti circularis auctore Columella ſequendis a nobis tradita ſunt atque expoſita, lectores meliora de iis edocebunt, quam quae

Hambergerus a Gesnero *) super his ipsis formulis interrogatus, in medium attulit. De priore recte quidem statuit, aream per ipsam non nisi verae proximam inueniri, sed quae ad alteram Gesneri de eadem formula interrogationem respondet, a proposito plane sunt aliena. Posterioris formulae autem, quae de inuenienda segmenti circuli magnitudine agit, rationem omnino non est assecutus, vti ex eo intelligi potest, quod illam in eo solo casu, vbi altitudo segmenti est tantarum partium 4, quantae insunt in basi 16, $\frac{h}{b}$ ergo $= 0,5$, veram magnitudinem dare asserit, cuius quippe contrarium ex antecedentibus constat. Nec minus Kaestnerum vera eiusdem formulae indoles latuit, id quod ex ipsius de illa iudicio **) colligitur. Ceterum formula Columellae ad mensurationem trianguli aequilateri spectans a recentioribus quoque geometriae practicae auctoribus iterata et tradita est, veluti Clauio ***) atque Adriano Metio ****).

13. Corollarii loco addemus huic commentationi formulas aliquot, quibus, absque canonis trigonometrici auxilio, dimensionem segmenti circularis, semicirculo minoris, vero quidem nonnisi proxime, satis ta-

*) Temperare mihi non possum, quin confessionis Gesneri hac occasione de se ipso prolatae, qua se minus quam vellet in erudito illo puluere versatum esse, dicit, mentionem iniiciam. Elucet quippe ex ea summum ipsius circa disciplinas mathematicas studium a Kaestnero idemtidem praedicatum et collaudatum, qui illum hac in re cum Melanchthone, communi Germaniae praeceptore, comparat, quem Vossius (de Mathes. nat. et constit. cap. XXVI. §. 13.) refert dicere fuisse solitum, se grandi illa, qua tum esset, aetate Herlini fore auditorem, si Argentinae (vbi Herlinus mathesin docebat) viueret.

**) Elem. trigonometr. plan. propos. 18. XIII.

***) Geometr. pract. Lib. IV. cap. II. §. 5.

****) Geometr. practic. Part. II. cap. III. §. 5.

men accurate peragere datur, primumque eas exhibebimus, quae aream S per altitudinem h atque dimidiam basin segmenti b expressam sistunt. Sunt autem istae:

$$S = \tfrac{4}{3} bh \left(\frac{5\,bb}{5\,bb - hh}\right) - \frac{16}{175} \cdot \frac{h^5}{b^3} + \text{etc.}$$

$$= \tfrac{4}{3} bh \left(\frac{35\,bb + 12\,hh}{35\,bb + 5\,hh}\right) + \frac{16}{2205} \cdot \frac{h^7}{b^5} - \text{etc.}$$

$$= \tfrac{4}{3} bh \left(\frac{315\,b^4 + 133\,bbhh}{315\,b^4 + 70\,bbhh - 5\,h^4}\right) - \frac{512}{218195} \cdot \frac{h^9}{b^7} + \text{etc.}$$

$$= \tfrac{4}{3} bh \left(\frac{1155\,b^4 + 861\,bbhh + 128\,h^4}{1155\,b^4 + 630\,bbhh + 35\,h^4}\right) + \frac{512}{1486485} \frac{h^{11}}{b^9} - \text{etc.}$$

Deriuatae sunt hae expressiones ex serie aream segmenti exhibente $\tfrac{4}{3} bh + \frac{4}{1.\,3.\,5} \cdot \frac{h^3}{b} - \frac{4}{3.\,5.\,7} \cdot \frac{h^5}{b^3} + \frac{4}{5.\,7.\,9} \cdot \frac{h^7}{b^5} - \frac{4}{7.\,9.\,11} \cdot \frac{h^9}{b^7} + \text{etc.}$ atque sic comparatae, vt earum quaeuis vlterior aream exactius, quam superiores, praebeat. In ipsa areae computatione primum solummodo earum membrum adhibetur, altero dumtaxat inseruiente ad rationem gradus veritatis, quem per primum consequi liceat, subducendam. Quodsi vero quotus $\frac{h}{b}$ sit maior, quam vt vel postrema formularum praecedentium ad aream satis exacte computandam idonea sit, factis $\frac{bb - hh}{2h} = b'$ et $\frac{(b-h)^2}{2h} = h'$, supputetur area S' segmenti, cuius dimidia basis $= b'$, altitudo vero $= h'$, atque erit

$$S = \tfrac{1}{2}\pi (b + h')^2 - 2bb' - S'$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi (b' + h)^2 - 2bb' - S'$$

Quo formularum allatarum vſus clarius pateat, haud incongruens fuerit, exemplum eius apponere. Sit igitur inuenienda area ſegmenti circularis, cuius baſis eſt 7 pedum, altitudo unius pedis. Quia ergo eſt $\frac{h}{b} = \frac{2}{7}$, erit $\frac{h^7}{b^5} = \frac{h^5}{b^5} \cdot hh = (\frac{2}{7})^5$. Sed eſt $\frac{2}{7} > 0,28$ et $< 0,29$, ergo $(\frac{2}{7})^5 > 0,00172$ et $< 0,00205$ *), quare $\frac{16}{2205} \cdot \frac{h^7}{b^5} > 0,000012$ et $< 0,000014$; proinde area ex formula ſecunda computata in quatuor prioribus figuris decimalibus verae congruit. Quamobrem area quaeſita eſt $= \frac{14}{3} \cdot \frac{1763}{1735} = \frac{14}{3} (1 + \frac{28}{1735})$ $= 4,6667 + 0,0753 = 4,7420$ ped. quadrat. — Exemplum propoſitum habetur in Clariſſ. Mayeri *Stereometr. pract.* ſiue *Geometr. pract. Part.* V. §. 31. *nro.* VII, vbi quaeritur ſoliditas portionis cylindri, quae pro baſi vtraque habet ſegmentum modo menſuratum, altitudinem vero 12 ped. Soliditas requiſita igitur eſt $= 4,7420 \cdot 12 = 56,904$ ped. cubic.

Dicta chorda dimidii arcus, quo ſegmentum finitur, c, rectaque, quae ab extremitate baſeos ad punctum biſſectionis ſagittae ſeu altitudinis ſegmenti ducitur, k, erit etiam

$$S = \tfrac{4}{3} h \left(\frac{3b+2c}{5}\right) + \tfrac{1}{35} \cdot \frac{h^5}{c^3} - \text{etc.}$$
$$= \tfrac{4}{3} h \left(\frac{c+4k}{5}\right) + \tfrac{1}{280} \cdot \frac{h^5}{c^3} - \text{etc.}$$

---

*) Depromti ſunt hi numeri e tabula dignitatum partium unitatis centeſimalium, quae extat inter eas, quas Lambertus ſub titulo: *Zuſätze zu den logarithmiſchen und trigonometriſchen Tabellen*, Berol. 1770 publicauit. Recudi illam curauit Schulzius in collectionis tabularum logarithmicarum, trigonometricarum aliarumque a ſe editae Vol. II. p. 278—81. Sed tabula haud omnino mendis caret, quorum nonnulla vulgata ſunt a Vega ad calcem praelect. mathem. Voll. II.

Duae hae formulae debentur Newtono. Vid. ipſius *Opuſc. T. I.* p. 322 et Wallisii *Opp.* Vol. II. p. 388. Ad ſimilitudinem earum habetur quoque

$$S = \tfrac{4}{3} h \left(\frac{6c + 32k - 3b}{35} \right) - \tfrac{1}{360} \cdot \frac{h^7}{c^5} + \text{etc.}$$

Ductae vero ſunt expreſſiones modo prolatae ex ſerie aream ſegmenti exprimente $\tfrac{4}{3} ch - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \frac{h^3}{c} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{h^5}{c^3} - \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{h^7}{c^5} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{h^9}{c^7} - \text{etc.}$

Agmen harum formularum ad aream veram ſegmenti circularis appropinquantium claudant ſequentes duae

$$S = \tfrac{4}{3} h \left(\frac{3b + \sqrt{7(7bb + 4hh)}}{10} \right) + \tfrac{4}{2205} \cdot \frac{h^7}{b^5} - \text{etc.}$$

$$= \tfrac{4}{3} h \left(\frac{4c + 3\sqrt{7(cc - 5hh)}}{25} \right) - \tfrac{1}{441} \cdot \frac{h^7}{c^5} + \text{etc.}$$

quarum poſteriorem Huttonus in libro, quem inſcripſit: *Menſuration*, p. 107 tradidit.

De reliquo ſeries $\tfrac{4}{3} bh + \tfrac{4}{15} \frac{h^3}{b} - \tfrac{4}{105} \frac{h^5}{b^3} + \text{etc.}$ euidenter monſtrat, formam $bh + mbb + nhh$, minus aptam eſſe ad aream ſegmenti circularis repraeſentendam: haecque diſconuenientia eſt cauſa magnae diſcrepantiae, quam pro valoribus $\frac{h}{b}$ ad o accedentibus inter aream veram et illam, quam Columellae formula praebet, intercedere ſupra animaduertimus.

AD CLARISSIMVM

IO. GOTTL. SCHNEIDERVM

SAXONEM

PROFESSOREM VRATISLAVIENSEM

EPISTOLA

SVPER

EPAPHRODITI ET VITRVVII RVFI

EXCERPTIS GEOMETRICIS.

Numquam animum induxissem, Vir doctissime plurimumque suspiciende, his Te appellare litteris, nisi praeuidissem animo, Te, qua es humanitate, benigne accepturum esse, quae voluntati Tuae, quam iussi loco habeo, non magis, quam desiderio, quo iamdiu tenebar, studium erga Te meum et obseruantiam publice testandi, obtemperaturus hoc pacto ad Te delata volui. Quaesieras ex me pro amicitia, qua me dignaris, in litteris ad me humanissime datis, num quae olim in commentatione Societati Regiae Goettingensi oblata de duabus Columellae formulis mensurandi conscripseram, alicubi iam extarent typis expressa, quo quidem Tuam eorum propius inspiciendorum voluntatem haud obscure significare mihi videbaris. Illa igitur iam ad Te vna cum hac epistola perueniunt, vtcumque reficta atque elimata, quo Tua, si fieri posset, exspectatione digniora redderem. Porro autem de euulgatis in Bredouii Tui epistolis Parisiensibus Epaphroditi et Vitruuii Rufi excerptis geometricis certiorem me faciendo haud parum me Tibi obligaueras. Huic tantae beneuolentiae Tuae vt aliquo modo responderem, simulque nutui Tuo, quem in epist. Parisiens. p. 234. deprehendere mihi visus sum, me accommodarem, constitui, quae mihi excerpta illa perlustranti in mentem venere, et adnotatu digna visa sunt, Tecum hic communicare. Sequar autem in annotatiunculis meis ordinem propositionum, quem Schotti exemplar seruat, quippe quod non solum maximam partem praeceptorum ab Hasio in lucem prolatorum, verum praeterea et alia complectatur, quae Hasius nondum publicauit. Liceat autem com-

pendii caufa paragraphos in Schotti exemplari extantes notis numeralibus Romanis defignare, quo ab articulis, in quos Hafius excerpta a fe euulgata difpertitus eft, quosque cum ipfo characteribus numerorum vulgaribus notabo, diftinguantur. His praefatis ad rem venio.

§. I. = art. 8. 9. (2). 10. (1). 11. praemiffis appellationibus laterum trianguli rectanguli ex datis duobus quibusvis eorum reliquum inuenire docet. Idem edocemur a Boëthio in Geom. lib. II. rubrica altera de trigono orthogonio p. 1524. *), et a Ger-

---

*) Vfus fum editione operum Boëthii, quae cura Henrici Glareani Bafileae ex officina Henricpetrina 1570 prodiit. Ad manus praeterea fuit Venetiana operum Boëthii editio anno 1491 publicata. Vtraque duos libros geometriae Boëthii exhibet, figuris fat nitidis illuftratos, quod ideo monendum duxi, quia Kaeftnerus (*Gefch. der Math. B. I. S.* 282.) vnius dumtaxat libri, primi fcilicet, quem folum videre ipfi contigit, recenfum dedit. Editus eft liber ifte feparatim fine figuris vna cum textu de Sphaera Joan. de Sacrobofco, commentariis Jacobi Fabri Stapulenfis illuftrato, primumque prelo Henrici Stephani (aui) excufus. Hanc eius editionem collustrare mihi licuit. Extat in volumine Bibliothecae Paulinae Lipfienfis, quod maximam partem opera Jacobi complectitur; et inprimis ob id notabile eft, quod in eo, fi non primus omnium, at certe vnus ex primis libris, qui typis Henrici Stephani impreffi funt, deprehenditur. Continentur hoc libro: Jacobi Fabri introductio in arithmeticam Boëthii, et Caroli Bouilli Veromandii opufcula quaedam geometrica, (quas inter eft liber de quadratura circuli, in quo Wallifius cycloidem inueniffe fruftra fibi perfuafit. Opp. Tom. III. p. 676.) perfpectiua introductio et infuper Aftronomicon eiusdem auctoris. In vltima pagina, quae eft auerfa fol. CXI. legitur: *Id opus impreſſerunt Volphgangus hopilius et Henricus ſtephanus ea in arte ſocii in Almo Pariſiorum ſtudio Anno Chriſti Celorum totiusque na-*

berto Geometr. *) cap. XLIX. Theorema Pythagoricum, quo formulae traditae nituntur, ab auctore excerptorum minus abſone quidem, quam a Gerberto, attamen nec ſatis accurate enunciatum eſt.

§. II. et III. = art. 16. et 17. montis ſuperficiem metiri monſtrant. Formulae ſolutionis, quas etiam habes apud Boëthium p. 1535., poſteriorem quoque apud Gerbertum c. LXXXI. ſed imperfectam, ad ſimilitudinem eius, ad quam dimenſio ſuperficiei coni detruncati inſtituitur, quaque Boëthius p. 1534. et Gerbertus c. LXIV. in ſimili problemate vtuntur, compoſitae appropinquationem tantum ad veritatem permittunt. Ceterum omnino eo modo exprimi debent, quo Haſius eas edendas curauit, in cuius art. 17. poſt: *fit* $\overline{DCCC}$ verba omiſſa: *facio et aſcenſus ambos in vnum, id eſt,* $\overline{DCCCL}$ *et* $\overline{DCCL}$, *ſumpta adaeque dimidia, fit* $\overline{DCCC}$, inſerenda ſunt.

§. IV. = art. 18. 19. enumerantur ſpecies trianguli, inter quas monſtrum trianguli, trigonus *parallelogrammus,* pro quo trigonus *amblygonius* ſubſtitui debet, occurrit, oſtenditurque, quomodo ex data baſi et latere trianguli iſoſcelis altitudo, et hac inuenta, area inueſtigari queat. — Eadem habentur apud Boëthium p. 1521. et 1522., atque apud Gerbertum, qui ſpecies trianguli copioſius ac diligentius perſecutus eſt, c. VII. et L. Praeterea Boëthius p. 1521. et Gerbertus c. XLIX. de area trianguli aequi-

---

turae conditoris 1503. *Die vigeſima ſeptima Junii.* Ceterum liber ſecundus geometriae Boëthii in Glareani editione perperam ex Euclide translatus dicitur, quum in toto Elementorum opere ne vlla quidem earum praeceptionum, quibus iſte liber refertus eſt, inueniatur.

*) Edita a Pezio in *Theſauro Anecdotorum noviſſimo.* Cf. de ea Kaeſtneri *Geometr. Abh.* I. 1., Montucla *Hiſt. des mathem.* Tom. I. p. 500.

lateri ex dato ipſius latere inuenienda praecipiunt, vbi notandum venit, rationem altitudinis trianguli aequilateri ad dimidiam baſin ſtatui ab illis = 26 : 15, eamdem nimirum, quae in Columellae formula menſurandi trianguli aequilateri aſſumta eſt. *)

§. V. = art. 20. praeceptum eſt parallelogrami rectanguli diagonalem datis eius lateribus inueniendi. Eadem regula, quae nonniſi repetitio primae in §. I. propoſitae eſt, datur a Boëthio p. 1530., a Gerberto c. XCII.

§. VI. = art. 21. traditur ratio, trianguli altitudinem ex datis tribus lateribus, adeoque aream in eo caſu inueniendi, quo anguli ad baſin ſunt acuti, et perpendiculum e vertice trianguli in baſin demiſſum intra trianguli ſpatium cadit. Boëthius idem problema p. 1523., Gerbertus c. LI. ſoluit. Solutionis fundamentum eſt prop. 13. libr. II. Elem. a recentioribus etiam huic problemati ſoluendo adhibita **), per quam alterutrum ſegmentorum baſeos a perpendiculo factorum quaeritur, quo inuento perpendiculum ipſum per theorema Pythagoricum eruitur. — Excerpta Haſii art. 23. idem problema alio exemplo illuſtratum exhibent, quod etiam a Boëthio p. 1527. et Gerberto c. XLIV. et LVI. prolatum eſt, atque eo potiſſimum notari meretur, quod numeri 13, 14, 15

---

*) Gerbertus, in epiſtola ad Adelboldum Geometriae annexa, ſubtiliore discuſſione ſe illam rationem = 12 : 7 inueniſſe adfirmat, qua in discuſſione tamen falſus fuit. Nam ratio 12 : 7 multo minus accurata eſt, quam 26 : 15, vti vtramque duplicando intelligitur. Exſiſtit autem fractio $\frac{12}{7}$ et ipſa ex fractione continua, $\sqrt{3}$ exhibente, non immediate quidem, ſed interpolando ſeriem fractionum ipſo $\sqrt{3}$ minorum, $\frac{1}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{71}{41}$ etc. vbi altero loco prouenit.

**) Cf. Tacqueti Scholium ad hanc propoſ. in Elem. geometr.

rationem laterum trianguli seruantes sic sunt electi, vt altitudo, hinc et area rationalis fiat. In exemplo §. VI. idem quidem obtinet, sed triangulum ibi expositum est rectangulum, cuius latera numeris illis notis 3, 4, 5 sunt proportionalia; quocirca non modo area, quae ducendo vnum cathetum in dimidium alterius efficitur, sed et perpendiculum in hypotenusam, quod producto cathetorum per hypotenusam diuiso exsistit, rationale fiat, necesse est. — Gerbertus insuper c. XLI. problematis initio expositi alterum quoque casum, quo vnus angulorum ad basin obtusus est, et perpendiculum extra triangulum cadit, respiciens solutionem quidem legitimam, Elem. II. 12. superstructam, tradidit, verum magnitudinem laterum trianguli numeris inconsiderate atque infeliciter definivit. Namque basi dat 8, cruri maiori 18, minori vero 10 pedes, ponit ergo crus maius aequale cruri minori ac basi simul sumtis, quod quam sit absurdum, non est, quod moneam.

§. VII. = art. 22. regulam offert a Proclo ad Elem. I. 47. (IV. c. 21.) Platoni, a Boëthio autem p. 1533. Archytae attributam, triangulum rectangulum in numeris, i. e., tres numeros (integros) inueniendi sic comparatos, vt quod a maiore fit quadratum, aequale sit quadratis duorum minorum in vnam summam collectis. Problema hoc, quod indeterminatum est, Boëthius et Gerbertus, qui id c. LXXX. habet, nec non excerptorum auctor ineptum in modum, perinde puta ac si determinatum fit, protulerunt. — In excerptis ab Hasio proditis habetur quoque art. 3. formula, quam Proclo perhibente Pythagoras isti problemati soluendo constituit, quamque etiam Boëthius p. 1524. et Gerbertus c. XLVII., ille quidem strictius, hic autem paullo fusius exposuerunt. Posterior ad hoc a c. X. inde vsque ad c. XIII. multis quidem verbis, nihilo secius tamen ieiune ac tenuiter, de

triangulis Pythagoricis, quo nomine veniunt numeri conditioni problematis modo propositi satisfacientes, disseruit. Vtramque autem et Pythagorae et Platonis formulam demonstratam dedit Kaestnerus in *Elem. Analys. finitor.* §. 187., vbi simul plura circa triangula Pythagorica affert notatu digna, illo tamen, quod vtique iucundum est cognitu, praetermisso, problema de inueniendis duobus numeris quadratis, quorum summa itidem sit numerus quadratus, ab Euclide iam in Elem. lib. X. prop. 29. Lemm. I. multo generalius, quam a Pythagora ac Platone praestitum erat, solutum esse. Huius vero solutionis ope in promtu est, quotcumque libet triangula scalena, quorum vt altitudo ita et area rationalis sit, in numeris inuenire. Sumto v. c. numero 144, qui quatuor modis ex duobus numeris planis similibus iisdemque paribus componitur, quum sit $144 = 8 . 18 = 6 . 24 = 4 . 36 = 2 . 72$, reperiri possunt, quatuor triangula Pythagorica, quorum vnum circa angulum rectum latus est $12 = \sqrt{144}$. Reliqua scilicet triangulorum istorum latera sunt, vnius $\frac{18+8}{2} = 13$, $\frac{18-8}{2} = 5$, alterius $\frac{24+6}{2} = 15$, $\frac{24-6}{2} = 9$, tertii $\frac{36+4}{2} = 20$, $\frac{36-4}{2} = 16$, quarti denique $\frac{72+2}{2} = 37$, $\frac{72-2}{2} = 35$. Hinc coniugatis iam binis quibusvis horum triangulorum ita, vt latus vnius numero 12 notatum lateri alterius, quod eodem numero insignitum est, applicetur ac superincidat, existunt duodecim triangula scalena, quorum latera rationes, in tabella sequenti expositas, seruant.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Basis =	14	21	25	40	44	51	4	7	11	19	26	30
Crus maius =	15	20	20	37	37	37	15	20	20	37	37	37
Crus minus =	13	13	15	13	15	20	13	15	13	20	15	13
Altitudo =	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

Omisso triangulo III., quod, vti antea vidimus, rectangulum est, reliquorum duo priora sunt acutangula, nouem posteriora autem obtusangula. Primum triangulum, quo Boëthius p. 1527. et Gerbertus c. XIV. vsi sunt, id habet insigne, quod numeri altitudinem et latera exprimentes, 12, 13, 14, 15 naturali ordine se inuicem excipiunt, quo nomine triangulum hoc aeque solitarium est, ac triangulum illud rectangulum laterum 3, 4, 5. Reperire quidem licet innumera triangula scalena, quorum latera numeris naturali serie sibi succedentibus repraesententur, at tunc altitudo eorum huic legi non subiicitur, vti videre est ex tabula hic subiecta, quae aliquot eiusmodi triangula ob oculos ponit.

Basis =	52	194	724	2702	10084 *) etc.
Crus maius =	53	195	725	2703	10085
Crus minus =	51	193	723	2701	10083
Altitudo =	45	168	627	2340	8733

Quoduis horum triangulorum propius ad triangulum aequilaterum accedere, quam proxime praecedens, facile perspicitur.

Hasii exemplar art. 5. 6. amplius solutum sistit problema, quo ex datis basibus atque altitudine trapezii rectanguli, area et latus reliquum, quod hypotenu-

*) Bases exhibitorum hic triangulorum aeque vt altitudines constituunt seriem recurrentem scalae relationis — 1; 4. Primum membrum prioris seriei est 14, alterius 12, basis quippe et altitudo trianguli I. tabulae praecedentis.

ſae nomine inſignire auctori excerptorum placuit, quaeritur. Formula art. 5. iuſta eſt, eademque a Boëthio p. 1530. traditur. Gerbertus c. XLVIII. rationem paullo aliter, ſed non minus recte iniit. At art. 6. formula, vt in membranis ſe habet, prorſus falſa ac praepoſtera eſt. Videtur excerptorum auctor hic duce, quem ſequeretur, deſtitutus ſuum ipſius Martem experiri voluiſſe, quod ipſi infeliciter ceſſit. Haſius quidem errorem eius ſuſtulit, formulamque legitimam in erroneae locum ſubſtituit, verum nulla, vt opinor, probabili ratione. Quum enim codicis numeri verbis omnino reſpondeant, optimeque inter ſe conſpirent, cauſam idoneam textus ſic immutandi, vt plane nouus effingatur, adeſſe non video. Porro haud ſcio an vocabulum *chorauſtes* vel *choruſtes*, quod in membranis legitur, ab Haſio autem in *corypho* mutatum eſt *), auctori excerptorum reſtituendum ſit, propterea quod vox *corauſtus*, idem prorſus atque iſtud ſonans communemque originem prodens, apud Gerbertum pluries, videlicet c. X. et iam adducto c. XLVIII., vbi ipſum problema art. 5. tractatur, occurrit. Neutrius tamen vocabuli deriuationem me vlla probabili coniectura adſequi potuiſſe, libenter fateor.

Quae ſuper haec Haſii exemplar art. 14. et 15. exhibet problemata duo, quibus longitudine ac latitudine agri formae rectangulae datis numerus ſeminum

---

*) Stricte neque parallelogrammo neque trapezio baſium parallelarum vertex ſ. coryphe, ſed ſoli triangulo conuenit. Non ſine ratione itaque Clariſſim. Pfleiderer Euclidi definitionem IV. libri VI. (cf. eius Schol. in hunc libr. Part. I. §. 1. 2.) abiudicat, haud genuinam pronuncians. Comprobatur haec ſententia eo, quod in Heronis *ὀνόμασ. γεωμετρ.* p. 41. vnius trianguli altitudinis extat definitio, quae ſic ſe habet: *Τριγώνου ὕψος καλεῖται ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.*

in eo disponendorum vel arborum in eo collocatarum ex noto ordinum interuallo tum per longitudinem tum per latitudinem, et viciſſim ex illo numero longitudine aut latitudine data alterutra quaeritur, proprie ad geodaeſiam non pertinent, ſed auctor excerptorum ea ad exemplum Columellae, qui prius problema lib. V. cap. 3. per multos caſus deduxit, adieciſſe videtur. De cetero problemata iſta facilem ſolutionem habent, vt mirum videri queat, Gerbertum, qui eadem c. LIII. propoſuit, in iis ſoluendis a vero deflexiſſe.

Praecepta §. VIII—XVI. contenta non aream figurarum regularium, ſed numeros polygonales et pyramidales qui dicuntur, nec non latera numerorum polygoniorum, inuenire docent. Talia etiam a Boëthio p. 1530—1533. pro iis traduntur, quibus aream figurarum regularium ſeu ſpatium lateribus earum terminatum menſurare liceat, quod eo magis demirandum eſt, quia Boëthius in Arithm. lib. II. c. 6. et ſeqq. accurate de numeris figuratis egit, generatione earum dilucide explicata, vt adeo numerum punctorum in formam polygoni diſpoſitorum a multitudine pedum quadratorum in eodem contentorum vtique diſcernere debuiſſet. Quid, quod regula p. 1531. de hexagono tradita, quam auctor excerptorum §. X. ruminatus eſt, prorſus falſa eſt, numeros plane diuerſos ab iis, de quibus Boëthius l. l. c. XVI. exponit, ſiſtens, vti cuilibet numerum hexagonum lateris 6, qui eſt 66, ad formulam a Boëthio p. 1531, et excerptore noſtro §. X., conſtitutam computanti conſtabit. Pro illo enim numero 78 inueniet.

Quae modo protuli, ſuſpicionem mouent, extremam partem libri primi geometriae Boëthii inde a verbis p. 1516: *His etiam compendioſis* . . . vsque ad finem, totumque librum ſecundum non a Boëthio, ſed ab alio neſcio quo auctore profecta eſſe. Confirmatur haec ſuſpicio eo, quod Boëthius in prooemio

libri primi, se ea, quae ab Euclide obscure prolata essent, exponenda et lucidiore aditu expolienda suscepisse profitetur. Atqui extrema pars libri primi et integer liber secundus ab hoc instituto procul absunt, quum eiusmodi complectantur res, quarum nullam apud Euclidem, vt iam monui, repereris, praeter definitiones aliquot circa finem libri primi, quae eaedem iam in principio libri extant. Accedit, quod harum definitionum alterae prioribus concinnitate atque accuratione longe sunt inferiores, quod quomodo euenire potuerit, si eundem auctorem Boëthium habeant, parum intelligo. Praeterea hae ipsae definitiones, quae in extrema libri primi parte p. 1516—1517. leguntur, inueniuntur quoque maximam partem iisdem, quibus apud Boëthium, verbis expressae in Frontini expositione formarum, quae adnotante Goesio in MStis partim M. Iunio Nypso, partim Gerberto adscribitur. Et sic plura libri secundi capita passim in scriptoribus rei agrariae aliis auctoribus adtributa offendes. Rubricae autem de abaci ratione et de diuisionibus, quae in fine libri primi p. 1517—19. habentur, alieno plane loco positae sunt, vtpote ad arithmeticam potius quam ad geometriam referendae. Nescio an et illud, quod antiquissima geometriae Boëthii editio, cuius supra mentionem feci, extremam partem libri primi ac totum librum secundum non continet, sed opus verbis libri primi: *quod oportebat facere*, quae in summa pagina 1516 leguntur, finit, pro argumento, illam partem istumque librum Boëthii non esse, habendum sit.

Sed missa hac de geometria Boëthii disputatione, quam tamen Tibi, eruditissime ac summopere colende Schneidere, non displicituram confido, ad propositum reuertor. Gerbertus igitur, qui formulas §. VIII—XVI. cap. LV., LX. et LXV. habet, errorem, quem

Boëthius *) atque excerptorum auctor in hexagono commiſerunt, cum iis non participat, formula legitima tradita. Neque diuerſitas areae ſ. embadi figurae regularis a ſummo punctorum per eam diſpoſitorum illum omnino praeteriit, ſicut ex ipſius epiſtola ea de re ad Adelboldum ſcripta, cuius antea mentionem feci, apparet. Ceterum quoniam Schotti exemplar mendis non ſolum ſcripturae ſed interpunctionis etiam praeter modum ſcatet, haud ab re fuerit, formulas quas in inueniendis numeris polygoniis ex lateribus et viciſſim his ex illis, nec non numeris pyramidalibus ſequi oportet, hic apponere. Harum ſcilicet formularum ſubſidio quilibet leuiter tantum in arithmetica verſatus menda iſta absque negotio tollet, ſi modo animaduerterit, §. VIII. et XIII. tantum numeros polygonios ex latere, §. IX. ſolum latus numeri trigonalis, §. X. numerum hexagonum ex latere viciſſimque hoc ex illo, ſed formula inuerſa §. XI., XII., XIV., XV. et XVI. non modo numeros polygonales ex lateribus haecque ex iſtis, verum et numeros pyramidales inueſtigari. Formulae ipſae **) ſic ſe habent.

*) Breuitatis cauſa hunc et in poſterum nominabo, etiamſi totius operis geometriae nomen ipſius prae ſe ferentis auctor non ſit.

**) Bachetus duas priores regulas in commentario ſuo ad prop. IX. libri Diophanti de numeris multangulis, tertiam autem in appendice ad hunc librum tradidit. Fluunt hae regulae ex formulis a Kluegelio in Lexic. mathem. artt. *Polygonalzahlen* et *Pyramidalzahlen* Tom. III. p. 822. et 930. expoſitis. Regula prima et altera mera ſunt translatio formularum expoſitarum, ſignis algebraicis in verba conuerſis; tertiae conſtituendae formula p. 930. $\frac{1}{6}[(m-2)r-m+5]r(r+1)$ ſic exprimi debet: $\frac{1}{6}[(m-2)rr-(m-4)r+r](r+1)$, vbi $(m-2)rr-(m-4)r$ eſt duplum numeri polygonalis. Conferri quoque expediet, quae Kaeſtnerus l. a. l. de regulis particularibus Gerberti diſſeruit.

I) Vt numerus polygonalis lateris dati inueniatur, ducatur quadratum lateris in numerum angulorum binario diminutum et a producto auferatur latus toties ſumtum, quot anguli quatuor demtis reſtant, reliqui dimidium erit numerus quaeſitus.

II) Ad inueniendum latus numeri polygonii dati multiplicetur hic per octuplum numeri angulorum binario mulctati, producto addatur quadratum numeri angulorum quaternario diminuti, et ſummae quaeratur radix quadrata. Cui inuentae ſi adiiciatur numerus angulorum quaternario mulctatus, ſummaque per duplum numeri angulorum binario diminuti, diuidatur, quotus latus, quod quaeritur, manifeſtabit.

III) Numerum pyramidalem formaturus quaerat primo numerum polygonalem cognominem, huius dein duplo adiiciat latus ipſum, et ſummam ducat in latus vnitate auctum, producti partem ſextam ſumat, et numerum requiſitum habebit.

Si formula I et II trigono applicetur, notandum eſt, numerum angulorum quaternario multatum fieri negatiuum, ſcilicet $= -1$, quare in applicatione formulae I latus ſemel ſumtum non ſubtrahi, ſed addi debet. Numeri vero negatiui quadratum quum poſitiuum ſit, in accommodatione formulae II. quadratum vnitatis omnino adiiciendum, poſtea autem a radice quadrata inuenta vnitas deducenda eſt.

Vſus formularum prolatarum quo expeditior reddatur, exemplum eius praebuiſſe conueniet. Quaeramus igitur numerum heptagonum lateris 10. Ex formula I. hic eſt $= \frac{(7-2).10^2-(7-4).10}{2}$

$$= \frac{5.100-3.10}{2} = \frac{500-30}{2} = \frac{470}{2} = 235.$$

Si viciſſim latus quaerendum ſit, ad formulam II. eſt

$$= \frac{3+\sqrt{(8(7-2).235+3^2)}}{2(7-2)} = \frac{3+\sqrt{(40.235+9)}}{10}$$

$$= \frac{3+\sqrt{9409}}{10} = \frac{3+97}{10} = \frac{100}{10} = 10.$$ Quodſi deſideretur numerus pyramidalis heptagonus lateris 10, erit is per formulam III. $= \frac{(2.235+10)(10+1)}{6}$

$$= \frac{480.11}{6} = \frac{5280}{6} = 880.$$

Ex hoc exemplo perſpicitur, principium §. XI. ſic conſtitui debere. Omn. hept. aequis hab. later., cuius latus vnum in ſe multip. et poſtea quinquies duco; ipſam aream (ſic inepte vocatur latus et a Gerberto) ter deduco, dimidiam partem ſumo, heptagonum dico. Atque eadem ratione reliqua pars huius §. facile reſtituetur.

§. XVII. de colligenda ſphaerae ſuperficie (*incuruatura*) ex diametro praecipit. Praeceptum fundatur in prop. 137. libri I. Archimedis de ſphaera et cylindro, a quo auctore etiam adhibita ratio diametri ad peripheriam, quae = 7 : 22 ſtatuitur, arceſſita eſt. Inſcriptio c. LVIII. apud Gerbertum ſimile quidem praeceptum annunciat, verum formula ibi tradita non integram ſphaerae ſuperficiem, (*aream*) ſed tantummodo quartam eius partem, aream puta circuli ſphaerae maximi, praebet. At formula c. LXXXVI. contra titulum, qui eſt de inuenienda circuli incuruatura, ſuperficiem ſphaerae exhibet. Ceterum in fine §. verbis: *ac decima ſexta* expunctis, inſerendum eſt: *fit* 616.

§. XVIII. aream circuli ex diametro ſola, §. XIX. autem eam ipſam ex diametro et ambitu inueſtigare docet. Fundamen praeſcriptorum eſt prop. III.

in Archimedis libr. de dimenſione circuli. Gerbertus eadem praecepta habet c. LVI. et LXXVII., poſterius et Boëthius p. 1533. In numerorum vero §. XVIII. locum ex ordine ſubrogandi ſunt hi 196, 2156, 154.

§. XX. eſt praeceptum a Columella libr. V. c. II. art. 8. traditum aream ſemicirculi ex baſi eius i. e. diametro et latitudine curuaturae i. e. ſemidiametro inueniendi, ſed aliquatenus deformatum ac deprauatum. Rectius idem Boëthius p. 1534. propoſuit, et Gerbertus c. LVII. nec non LXXIX. repetiuit, niſi quod priore loco ſemidiameter circuli inepte diametrum ſemicirculi appellatur.

§. XXI. monſtrat circuli (maximi) triangulo rectangulo inſcripti diametrum ex lateribus inuenire. Formula ad hoc tradita, quam etiam Boëthius p. 1526. et Gerbertus c. LIX. praeſcribunt, recte ſe habet. Namque ex demonſtratione propoſ. 6. libr. IV. Elem., qua circulum dato triangulo inſcribere docemur, apparet, in ſchemate ibi appoſito eſſe $BE = BF$, nec non $CF = CG$. Quodſi iam ducta intelligatur AD, ob $AD^q = AE^q + DE^q = AG^q + DG^q$, et quia $DE^q = DG^q$, erit etiam $AE^q = AG^q$, hinc $AE = AG$. Poſito autem ABC angulo recto, DBE eſt $= \frac{1}{2}$ recti $= BDE$, proinde (Elem. I. 6.) $DE = BE$. Porro quum ſit $AB + BC = 2BE + AE + CF = 2DE + AG + GC = 2DE + AC$, habetur $AB + BC - AC = 2DE$. Sed eſt DE radius, ergo $2DE$ diameter circuli inſcripti, ideoque exceſſui, quo cathetorum ſumma hypotenuſam ſuperat, aequalis.

§. XXII. praeceptum eſt, altitudinem, ad quam acceſſus patet, ſine vllo calculo metiendi. Ratio illius in eo poſita eſt, vt rectae ex oculo in cacumen eductae inclinatio ad planum horizontale per oculum de-

ductum dimidio recto aequalis fit. Verum id quomodo methodo in excerptis expofita obtineatur, dici vix poteft. Tradunt quidem nonnulli geodaefiae fcriptores modum altitudinem acceffibilem absque calculo metiendi, quem hominibus illiteratis, veluti tignariis, in vfu effe dicunt; at is modus non fine inftrumento procedit, fed baculo, ftaturam menforis longitudine paullum excedente, opus habet. Huius quippe in terram ad corporis altitudinem infixi fummitate menfor, qui fupinus humi iacet, pro puncto vtitur, per quod vifum in cacumen dirigat, cuius vicem quodnam aliud punctum in excerptoris methodo expleat, id ipfum eft, quod in quaeftione verfatur.

§. XVIII. problema arithmeticum eft de inueniendo iugerorum numero, qui in producto decem millium paffuum per 10000 (paffuum) multiplicatorum continetur. Pro fundamento ponitur, mille paffuum per mille conficere iugera 868, quod nonnifi vero proximum eft. Diuifo enim numero 1000 × 1000 fiue 1000000 paff. quad. per 1152 paff. quadr., quot iugero infunt, effieitur quotus $868\frac{1}{18}$ iuger. Solutio autem, quae in Schotti exemplari mendofo perplexior eft, ita procedit. Quoniam eft $\frac{10000}{1000} = 10$, ergo $\frac{10000 \times 10000}{1000 \times 1000} = 10 \times 10$, erunt 10000 × 10000 paff. quadr. = 10 × 10 × 1000 × 1000 paff. quadr. = 10 × 10 × 868 iug. = 86800 iug., neglecto numero 5 iugerorum, qui ex multiplicatione partis decimae octauae iugeri per 100 prouenit.

Ex iis, quae hactenus de argumento excerptorum disputaui, perfpicuum effe puto, eorum auctorem geometriae non admodum gnarum fuiffe, qui praecepta a fe temere collecta faepenumero male intelligeret,

ſaepius etiam ſine ordine et confuſe proponeret. Praeterea manifeſtum eſſe credo, auctorem noſtrum ex iisdem fontibus, vnde Boëthius et Gerbertus ſuas metiendi formulas ſumſerunt, hauſiſſe. Etenim eiusmodi formulas in promtu fuiſſe, ſi non per ſe veriſimillimum eſſet, teſtimonio Gerberti certum atque indubitatum fieret, qui c. IV. ſe ex regulis, quae ad aream figurarum inueniendam paſſim diſperſae ferrentur, vtiliores digeſſiſſe, plane ac diſerte profitetur.

Haec ſunt, quae ſuper excerptis Epaphroditi et Vitruuii Rufi, per ſe quidem parui faciendis, at in hiſtoria geodaeſiae non omnino contemnendis, in medium afferre habui. Reliquum eſt, vt Te, Schneidere doctiſſime et maximopere ſuſpiciende, orem, vt adnotationes has qualescumque nomine Tuo celeberrimo inſcriptas aequi bonique facias, mihique et in poſterum faueas.

ADDENDA ET CORRIGENDA.

p. 22. lin. 22. pro *ex iis* legas *ob ea.*

p. 24. lin. 31. deleatur comma poſt *incola* et poſtponatur verbo *Piſcis.*

p. 38. Differentia inter ἐντείνειν et ἐγγράφειν melius et accuratius definitur dicendo, illud adhiberi de figura iam extante atque conſtructa, hoc de adhuc futura conſtruendaque. Hinc ſponte fit, vt figura intendatur in circulum, *tota* atque *inſimul* e loco quaſi remota, circuloque ſuperimpoſita, inſcribatur autem in circulo deſcribendo eam *per partes* ac *pedetentim. Intenditur,* ſi fieri poteſt, datum triangulum in datum circulum, at *inſcribitur* triangulum in dato circulo aequiangulum triangulo dato. Vid. Euclides toto libro IV. et Proclus l. infra laud. (II. 8.)

p. 39. Mirum forſitan videri queat, quod Plato verbo παραβάλλειν, quod Proclo teſte Pythagoraei iam de conſtructione figurae deficientis vel excedentis vſurparunt, non vſus fuerit. Verum notari debet, figuram deficientem vel excedentem, quae ad datam rectam παραβάλλεσθαι dicitur, ſemper cogitari parallelogrammam (χωρίον); quare Platoni, quum de conſtruendo triangulo

deficiente verba faceret, necesse fuit, aliud verbum quam παραβάλλειν adhibere.

p. 47. lin. 5. pro *BC* ꞔ q leg. *BC*q ꞔ

p. 56. lin. 8. pro τὴν legas τήν.

p. 60. Verbum, quo simplicissime transmutatio figurae in aliam formam indicatur, est μεταμορφόειν.

p. 64. Schleiermacherus non de triangulo rectangulo generatim, sed de triangulo rectangulo aequicruro agi coniicit, idque ex occasione schematis, quod Socrates duplicationis quadrati commonstrandae causa descripsit et editores Berolinens. p. 39. delineandum curarunt. Ista vero coniectura quum longe absit a Platonis mente, vera vtique dici nequit.

pag. ead. Exscripta iam erant typis omnia, quum ab amico litterato admonitus fui, in diarii dicti: *Schlesische Provinzialblätter* fasciculo octauo anni 1812, extare etiam loci a me tractati explicationem, cuius aliqua expositio quum merito desiderari atque exspectari possit, summam eius breuiter hic enarrabo. Auctor Ferdinandus Niekelius illa luculentum omnino eruditionis suae mathematicae specimen edidit, sicut ex iis, quae iam afferentur, patebit.

Ante omnia inculcat, haud facile euenturum esse, vt triangulum aliquod propositum dato circulo sic includatur, vt latera trianguli fiant subtensae circuli conterminae, quum triangulum quodcumque vno tantum circumscribi possit circulo, probabilitas ergo inclusionem in casu aliquo proposito perficiendi ad probabilitatem contrariam sit, vt 0 ad 1 h. e. omnino nulla. Quare vtique esse licitum, ad quaestionem propositam: datumne triangulum dato circulo includi queat, vt audacter, nequire, respondeatur. Neque opus esse hypothesi,

qua diiudicetur possibilitas, impossibilitate certa ferme atque explorata. Negat porro Niekelius, hypothesi quidquam aliud postulari posse, quam vt vel duobus trianguli lateribus quibuslibet bifariam diuisis in bissectionum punctis erigantur perpendiculares ad concursum vsque producendae, huiusque distantia a verticibus angulorum trianguli cum semidiametro circuli dati conferatur, ad cognoscendum, vtrum aequales sint nec ne, quippe quod aequalitas ad includendum dato circulo triangulum propositum necessaria sit; vel constitutis super duobus trianguli lateribus quibusuis triangulis isoscelibus, quorum crura sint radio circuli dati aequalia, videatur, num vertices eorum in eodem puncto coincidant, vtpote quod ad perficiendum intentum requiratur; vel etiam designata quantitate laterum trianguli per a, b, c, semidiametri circuli vero per r, inquiratur, aequatio relationem quantorum illorum exhibens

$$r = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}$$

valeatne nec ne. Ex qua quidem aequatione rursum effici ait, vix ac ne vix quidem futurum esse, vt lateribus trianguli et semidiametro circuli ad libitum assumtis inclusio desiderata fieri possit. Praeterea neque vllam hypothesium modo enumeratarum ex Platonis verbis elici posse, nec requiri, quum res multo breuius coaptandis deinceps lateribus trianguli in circulo conficiatur.

Reiectis dein eruditorum, qui in nouissima editione Berolinensi laudantur, explicationibus, antequam ad exponendam suam ipsius sententiam progrediatur Niekelius, monet, etiamsi impossibile quasi sit, vt circulo cuilibet proposito quoduis inscribatur triangulum datum, attamen ex aequatione supra allata colligi, tendendo vel extendendo triangulum illud, perimetro

eius ſpectata tamquam linea extenſibili *) ſiue immutando latera ipſius, ſumma eorum ſeruata tamen, fieri omnino poſſe, vt in infinitis numero circulis aptetur. Nam ſi modo poſita laterum ſumma $a+b+c=m$, quantitates a, b, c ſic aſſumtae fuerint, vt duo latera quomodocumque ſumta reliquo ſint maiora, alios ſubinde atque alios repertum iri valores ipſius r. Hoc autem non obſtare, quominus innumeri ſuperſint circuli, in quibus triangulum aptare non liceat, omnes veluti, quorum ambitus ſit minor perimetro trianguli. Ac licet in innumeris caſibus impoſſibilitas incluſionis ſtatim in oculos incurrat, innumeros tamen caſus reſtare, in confinio quippe poſſibilitatis atque impoſſibilitatis ſitos, in quibus adſpectus ſolus ad iudicium ferendum non ſufficiat. Atque id ipſum eſſe in cauſa, cur hypotheſi opus ſit ad diiudicandum, vtrum incluſio ſuccedat nec ne.

His praemiſſis effert Niekelius quaeſtionem, quam Plato proponit, a quo quidem non temere nec ſine ratione verbum ἐντείνειν poſitum eſſe arbitratur, hunc in modum: *Poteſtne triangulum datum in dato circulo ſic extendi, vt latera eius iam exſiſtentia fiant ſubtenſae circuli.* Tum verba difficilia: εἰ μὲν ἐστι .... enucleare adgreditur, quod quo perficiat γραμμὴν *perimetrum trianguli* ſignificare ſumit, et pro παρὰ legit παρίσως, quod ipſi valet *aequaliter;* παρατείνειν autem ipſi eſt: *ducere ſubtenſam in circulo*, οἷον ἂν reddit: *fieri poteſt* **), atque ἐλλείπειν per *deficere*. Quibus

*) Cohibui manum a correctione, qua hic opus eſt. Auctor pro extenſibili voluit dicere flexibili. Poſita enim perimetro extenſibili fieri non poteſt, vt ſumma laterum eadem maneat.

**) Cauſam huius interpretationis ſumit ex eo, quod Plato τοιούτῳ χωρίῳ dixit, quoniam putat, illum ſcripturum

declaratis hypothesin, verbis *εἰ μὲν ἐστι* .... expressam, sic enunciat: *Si triangulum fuerit eiusmodi, vt perimetro eius aequaliter in circulo extensa* (quod secundum Niekelium fit accommodando in circulo tres rectas, aequales singulas trienti perimetri, ita vt media extremas tangat) *fieri possit, vt triangulo hac ratione extenso desit aliquid ad conclusionem perfectionemque; aliud quid casurum est, rursumque aliud, si illud fieri nequeat.* *) Nimirum si perimeter trianguli maior non fuerit perimetro trianguli aequilateri in dato circulo inscribendi, vtpote omnium maxima, adeo vt arcus, qui a tribus rectis in circulo accommodatis subtenduntur, simul sumti integram non excedant peripheriam, triangulum datum sic licet tendere vel extendere, vt in dato circulo queat aptari: sin aliter fuerit, intentum non perficietur.

Haec explicatio magno quamuis eruditionis mathematicae apparatu, qui ei speciem aliquam roboris ac probabilitatis inducit, proposita et suffulta, multa tamen habet aut praue constituta aut male exposita, quorum illud grauissimum est, quod triangulum, de quo exponit hypothesis, non est triangulum ab initio

---

fuisse τοιοῦτον χωρίον, si per οἷον ἂν *tantum quantum* exprimere voluisset. Ignorauit itaque Niekelius vsum verbi ἐλλείπειν, qui apud Graecos geometras obtinet.

*) Verba ipsa Niekelii sunt: *Wenn das Dreyeck von der Art ist, daſs wenn man seinen Umfang gleichmäſsig in den Kreis ausſpannt, (nämlich in ein gleichseitiges Dreyeck, welches leicht geschehen kann, wenn man den dritten Theil des Umfanges als Sehne im Kreiſse herumträgt) und es geschehen kann, daſs dem so ausgeſpannten Dreyeck* (τὸ παρατεταμένον) *etwas zum Schluſse fehlt* (ἐλλείπει τοιούτῳ χωρίῳ) *so wird, dünkt mich etwas anders seyn, und hinwiederum etwas anders, wenn dies nicht geschehen kann.*

datum, circa quod verſatur quaeſtio, ſed plane aliud, et triangulo propoſito nonniſi iſoperimetrum. Talis vero ſuppoſitio vel permutatio in ludo quidem ac ioco, at non in disputatione ſeria ferenda eſt. Fortaſſe hic Niekelius, ad ea prouocauerit, quae principio commentationis ſuae de probabilitate triangulum datum in dato circulo aptandi disputauit, exiguam probabilitatem quaeſtioni ſatisfaciendi ſuae eius inuerſioni praetexens, ſed fruſtra. Nam etiam ſi ſit vero minus ſimile, aptationem deſideratam in caſu aliquo propoſito effici poſſe, quam non poſſe, attamen geometrae certa atque explorata, non vero probabilia tantum, ſectantis eſt, determinare, qua ſub conditione aptatio locum habeat, qua non. Neque opponere licet, verbo ἐντείνειν adſtrui et comprobari aliquatenus iſtam, quam Niekelius in reddenda quaeſtione atque exponenda hypotheſi ſecutus eſt, rationem, quum aliud ſit ἐντείνειν χωρίον εἰς κύκλον, aliud ἐντείνειν vel, ſicut Euclides loquitur, ἐναρμόζειν περιμέτρον χωρίου εἰς κύκλον, quorum neutrum pro altero accipi, neque in oratione accurata, qualis quidem a Platone exſpectatur, alteri ſubſtitui poteſt. Praeterea haud immerito dubitauerit quis, num Platoni illa trianguli aequilateri proprietas, qua inter omnia triangula eidem circulo inſcripta maxima praeditum eſt perimetro *), cuiusque cognitio ad condendam hypotheſin Platoni a Niekelio attributam, requiritur, nota fuerit, quum veteres disquiſitiones ſuas circa maxima minimaue in figuris tam planis quam ſolidis exiſtentia

*) Demonſtratio proprietatis trianguli aequilateri hic memoratae pendet ex eo, quod rectarum, quae in portione circuli inflectuntur, vt Serenus libr. II. de Sectione Coni, prop. 44. oſtendit, maxima eſt, quae ad punctum medium arcus inflectitur, quod idem facile ex demonſtrat. prop. 94. Dator. colligitur.

tantum non ad solas figuras isoperimetras direxisse ex monumentis eorum a Theone et Pappo seruatis *) appareat.

Quae hactenus de Niekelii explicatione disserui, ad res pertinent, ac monstrant satis, ni fallor eius inconcinnitatem atque inconuenientiam, quae multo etiam magis patefiunt, si ad verba adtendatur, in quibus interpretandis Niekelius identidem hallucinatus est. Vt enim de audentiore ipsius praepositionis παρὰ in adverbium παρίσως mutatione nihil dicam, significatio vocabulo γραμμῆς adsignata plane inaudita et inusitata est. Nec minus peruerse verbum παρατείνειν redditur: *subtensam ducere in circulo*, vtpote quod potius verbo ἐντείνειν vel ἐγγράφειν exprimatur, et quidem cum additamento εἰς κύκλον, cuius ellipsin nullo exemplo comprobatam tacite statuit Niekelius, qui simul male verbum ὑποτείνειν allegat, eique falso hanc vim tribuit, vt sit: hypotenusam ducere. **) Quin contra id ipsum verbum ad significandam subtensam circuli adhibetur, verum sic, vt ea dicatur ὑποτείνειν τῇ περιφερείᾳ (arcum subtendere). Porro si οἷον ἂν ᾖ perinde accipiatur, vt vult Niekelius, oratio sit nimis abundans eoque languida ac paene puerilis. Quis enim nisi dicendi plane rudis ad hunc modum loquatur: Si triang. hoc fuer. eiusm. vt perim. ei. aequal. in circ. extens., *fieri*

---

*) Εἰς τὸ τοῦ Πτολεμαίου βιβλίον ᾱ ὑπόμν. p. 11—17. et Collect. mathem. libr. V. — Theon se tractatum Zenodori de figuris isoperimetris in vsum suum vertisse profitetur, rem tamen quam Pappus ampliore tractatione complexus est, breuiter tantum pertractauit. Theonis non meminit L'Huilier in introductione ad librum: De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, quamquam de Pappi libro copiose refert.

**) Cf. quae de hoc verbo dicta sunt p. 56.

possit, vt desit ....., quum idem breuius et concinnius sic possit enunciari: Si ...... fuer. eiusm., vt perim. ..... extens. *desit* ....., vt taceam, admissa Niekelii interpretatione verbum substantiuum, quod alias proximum post οἷον occupat locum, nimis remotum haberi, atque omnino verborum ordinem interturbari. Deinde quum ratione interpretationis praecedentis incisi habita τὸ παρατεταμένον sit perimeter trianguli, non ipsum triangulum, quamquam Niekelius sibi non constans de eo exponit, verba ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ si ad τὸ παρατεταμένον, quod fit a Niekelio, referantur; in hoc absurdi inciditur, vt linea cum spatio conferatur. Denique moneo, in Niekelii expositione αὐτὸ abundare atque otiosum esse.

p. 70. lin. 30. loco *pedum* leg. *perticarum.*

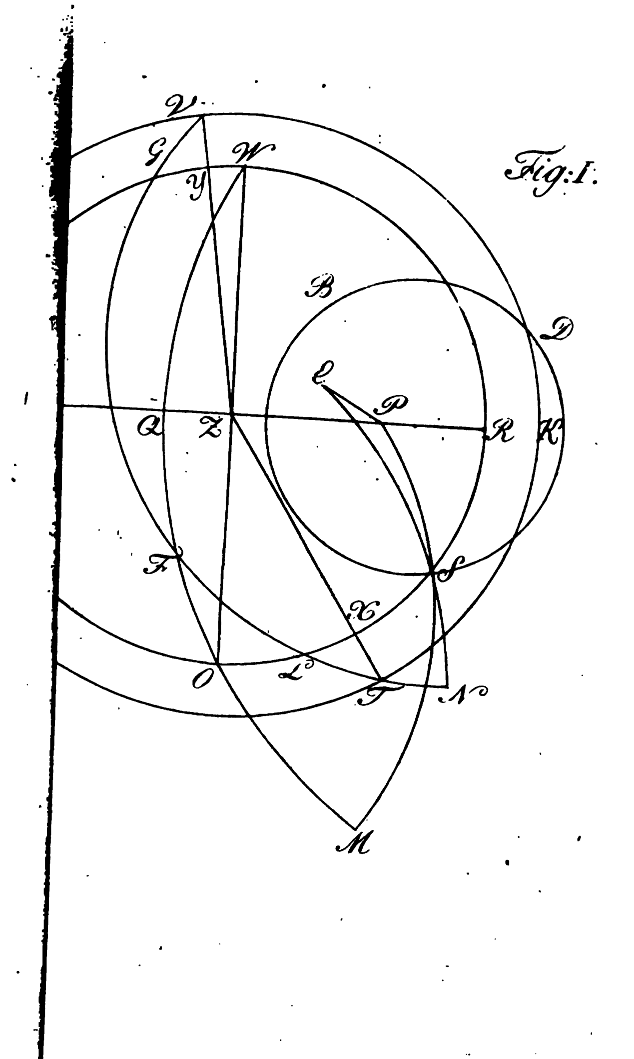


Fig: I.
V
G
W
Y
B
D
C
P
Q
Z
R
K
F
S
X
O
L
T
N
M




Widener Library
006120520
3 2044 085 254 068